Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2007
12.07.2007

9. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Übung

Aufgabe 1 (Wärmeleitungsgleichung mit unstetigen Randbedingungen)

L ösen Sie folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t - k u_{xx} &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) &= 0 \quad \text{für } x < 0 \\ u(x,0) &= 1 \quad \text{für } x > 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x,t) = f(\frac{x}{\sqrt{4kt}})$.

Aufgabe 2 (Wellengleichung I)

Es seien $g \in C^2(\mathbb{R}),\ k \in C^1(\mathbb{R})$ und $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei gegeben als

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\ [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} k(y)\mathrm{d}y.$$

Dann gilt:

(a) $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

(b) $u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$

(c) $u(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}$

(d) $u_t(x,0) = k(x),\ x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3 (Wellengleichung II)

S eien Ω ein beschränktes Gebiet und $T > 0$. Wir definieren mit Ω_T den Raum-Zeit-Zylinder $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$. Wir definieren den parabolischen Rand Γ_T als $\Gamma_T := \{(x,t) \in \partial\Omega_T : t < T \text{ oder } x \in \partial\Omega\}$.

Wir betrachten die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega_T \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T \\ u_t &= h \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

Zeige: Es existiert maximal eine Lösung.

Hinweis: Benutze die Energie-Methode aus dem Skript für die Wärmeleitungsgleichung, setze aber

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega w_t^2(x,t) + |\nabla w(x,t)|^2 \mathrm{d}x.$$