Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
28.06.2007

7. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Übung

Aufgabe 1 (Faltung)

Die Faltung $f*g$ definieren wir als $(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$ für alle Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für die das Integral existiert.

(a) Zeigen Sie: $f * g = g * f$.

(b) Seien f betragsintegrierbar, $g \in C^k(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Zeigen Sie: $D^\alpha(f*g) = f*(D^\alpha g)$ für $|\alpha| \leq k$.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Ableitung mit dem Integral vertauscht. Für Hörer der Analysis IV: Warum?

Aufgabe 2 (Regularität harmonischer Funktionen)

Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ und $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,1)$ eine radiale Funktion, d. h. es existiert eine Funktion $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei φ_ε gegeben durch $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$. Außerdem definieren wir $u_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u$ für eine harmonische Funktion u.

Zeigen Sie mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen: $u = u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ für alle $\varepsilon > 0$. Folglich sind harmonische Funktionen beliebig oft differenzierbar.

Hinweis: Die Faltung $\varphi * u$ ist hier zu verstehen als $(\varphi * u)(x) = \int_\Omega \varphi(x-y)u(y)\mathrm{d}y$ für $x \in \Omega$.

Aufgabe 3 (Fouriertransformation)

Bezeichne $L^1(\mathbb{R}^n)$ die betragsintegrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und $C_0(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \forall \varepsilon > 0 : \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \varepsilon\} \text{ ist kompakt}\}$. Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x$$

für $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n$. Die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1} : C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch

$$(\mathcal{F}^{-1}\widehat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ (ohne Beweis).

Seien $f, g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(a) $D^\alpha \mathcal{F} f = (-i^{|\alpha|})\mathcal{F}(x^\alpha f)$

(b) $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F} f$

(c) $\mathcal{F}(\Delta f) = -|\xi|^2 \widehat{f}$, falls $k \geq 2$

(d) $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$

Hinweis: Beachten Sie, dass auch die Umkehrung von (a) bzw. (b) gilt, d. h. ist $f, x^\alpha f \in L^1(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq k$, so ist $\mathcal{F} f \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Analog (b).

Aufgabe 4 (Laplace-Gleichung auf dem Halbraum)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *schnell fallend*, falls $\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$ für alle Multiindizes α. Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \text{ schnell fallend } \forall\, \alpha\}$ wird *Schwartzraum* und seine Elemente *Schwartzfunktionen* genannt. Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. Bestimmen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

Hinweis: Wenden Sie die Fouriertranformation auf die ersten $n-1$ Komponenten an. Warum kann man die Fouriertransformation nicht auf die gesamte Gleichung anwenden?