Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
21.06.2007

6. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Separationsansatz bedeutet, dass man die Funktion u in der Form $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ bzw. $u(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ darstellt.

Übung

Aufgabe 1 (RWP)

Lösen Sie für $a, b > 0$ folgendes RWP

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{in } (0,a) \times (0,b) \\ u_x & = & -a & \text{auf } x = 0 \\ u_x & = & 0 & \text{auf } x = a \\ u_y & = & b & \text{auf } y = 0 \\ u_y & = & 0 & \text{auf } y = b \end{array}$$

Hinweis: u ist ein quadratisches Polynom von x und y.

Aufgabe 2 (Separationsansatz I)

Lösen Sie folgende Differentialgleichung für $u : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \\ u(x,1) & = & x^2 - x \\ u(0,y) & = & 0 \\ u(1,y) & = & 0 \\ u_y(x,0) & = & 0 \end{array}$$

Hinweis: Die Sinus-Fourierreihe von einer Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi x)$ mit $\alpha_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)$.

Ferner gilt $\int_0^1 (x^2 - x)\sin(n\pi x) = \frac{2}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1)$.

Aufgabe 3 (Separationsansatz II)

Im Inneren des Einheitskreises $D \subset \mathbb{R}^2$ sei u harmonisch und auf dem Rand ∂D gelte $u(x, y) = 1 + 3y$. Bestimmen Sie die Lösung u durch Übergang zu Polarkoordinaten und Separationsansatz.

Hinweis: Die Darstellung der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten wurde in der letzten Übung behandelt.