Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2007
14.06.2007

5. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Übung

Aufgabe 1

Klassifizieren Sie die folgende partielle Differentialgleichung 2. Ordnung und bestimmen Sie deren charakteristische Richtungen.

$$u_{xx} + xyu_{yy} = 0, \quad x, y > 0$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Funktion $\phi(y)$ so, dass

$$(x + \phi(y)y)u_{xx} + (x - \phi(y)y)u_{yy} = 0$$

für $x > 1$ elliptisch und für $x < 1$ hyperbolisch ist.

Kann man ϕ so wählen, dass die PDE elliptisch für $|x| > |y|$ und hyperbolisch für $|x| < |y|$ wird?

Aufgabe 3

Sei u eine harmonische Funktion und sei v die Darstellung von u in Polarkoordinaten, also $v(\varphi, r) = u(x, y)$ mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$. Zeigen Sie

$$v_{rr} + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}v_r = 0.$$

Aufgabe 4

Eine Verschiebung im $\mathbb{R}^2$ wird beschrieben durch die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + a \\ \tilde{y} &= y + b \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, eine Drehung durch

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ \tilde{y} &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$

mit $\alpha \in [0, 2\pi[$. Sei u eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y}))$ ebenfalls harmonisch ist.