Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2007
23.05.2007

3. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Übung

Aufgabe 1 (Abhänigkeit)

Sind folgende Funktionssysteme unabhängig?

(a) $f_1(x,y) = \cos(x+y)^2, \quad f_2(x,y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(b) $f_1(x,y) = x^y, \quad f_2(x,y) = x^y + 1$

(c) $f_1(x,y) = \sin(xy), \quad f_2(x,y) = \sin(x+y)$

(d) $f_1(x,y) = x^2 y, \quad f_2(x,y) = x^4 y^2 + 3$

Aufgabe 2 (Charakteristisches System)

Wir betrachten die PDE

$$xu_x + yu_y = u. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die charakteristische Richtung.

(b) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung und bestätigen Sie die Lösung durch eine Probe.

(c) Seien $c > 1$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $\gamma_1(t) := e^{ct}$, $\gamma_2(t) := e^t$ und $\gamma_3(t) := 0$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung um die Anfangskurve γ gibt, in der genau eine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to u$ von (1) existiert mit

$$u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \gamma_3(t).$$

Aufgabe 3 (Anfangswertprobleme)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $au_x + bu_y = c$ in $\mathbb{R}^2$ und $u(x,0) = h(x), x \in \mathbb{R}$

(b) $au_x + bu_y - cu = d$ in $\mathbb{R}^2$ und $u(x,0) = h(x), x \in \mathbb{R}$

(c) $xu_x + yu_y = \frac{x}{y}$ in $\mathbb{R}^2$ und $u(x,1) = h(x), x \in \mathbb{R}$