Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2007
10.05.2007

2. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Übung

Aufgabe 1 (Charakteristiken)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

(a) $yu_x + xu_y = 0$

(b) $u_x + xu_y = 0$

(c) $3u_x - 4u_y = 0$

Aufgabe 2 (Wohlgestelltheit)

Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \\ u(\pm\frac{\pi}{2}, 0) &= 0 \\ u(\cdot, 0) &= 0 \\ u_y(\cdot, 0) &= u_1(\cdot) \end{aligned}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ im Sinne von Hadamard schlecht gestellt ist.

Hinweis: Wie kann man hier „Stetigkeit der Lösung bzgl. der Anfangsdaten" mathematisch exakt ausdrücken? Betrachten Sie ferner $u_1(x) = e^{-\sqrt{n}} \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Die Lösung ist dann $u(x, y) = e^{-\sqrt{n}} \frac{1}{n} \cos(nx) \cdot \sinh(ny)$.

Aufgabe 3 (Schwache Ableitungen)

Für eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$ den *Träger* von φ. Besitzt eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ einen kompakten Träger, so nennen wir sie *Testfunktion*. Die Menge aller Testfunktionen bezeichnen wir mit $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Existiert $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi' = -\int_{\mathbb{R}^n} g\varphi,$$

so nennen wir f *schwach differenzierbar* und g die *schwache Ableitung* von f.

(a) Zeigen Sie, dass jede stetig differenzierbare Funktion auch schwach differenzierbar ist, und bestimmen Sie die schwache Ableitung.

(b) Für Mathematikstudenten: In welchem Sinne ist die schwache Ableitung eindeutig gegeben?

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f schwach differenzierbar ist, und bestimmen Sie die schwache Ableitung f'. Zeigen Sie ferner, dass f' nicht schwach differenzierbar ist.

Anmerkung: Die sog. *Heaviside-Funktion* $H := f'$ ist im distributionellen Sinne (ein verallgemeinerter Begriff der Ableitung) immer noch differenzierbar. Diese Ableitung nennt man auch *Delta-* oder *Dirac-Distribution*, sie ist keine Funktion mehr.

(d) Wir betrachten die Transportgleichung $cu_x + u_t = 0$ für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t,x)(c\varphi_x(x,t) + \varphi_t(x,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}x = 0$$

nennen wir die *schwache Formulierung* der Transportgleichung. Zeigen Sie, dass $u(x,t) = F(x-ct)$ die schwache Formulierung löst, wobei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als schwach differenzierbar vorausgesetzt wird.