Fachbereich Mathematik
PD. Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
26.04.2007

1. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Übung

Aufgabe 1 (Gradient, Divergenz und Multiindex-Schreibweise)

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal differenzierbare Funktionen, $n \in \mathbb{N}$. Zur Erinnerung: Die Divergenz von g ist $\operatorname{div} g := \sum_{i=1}^n \partial_i g_i$. Manchmal sieht man auch die Schreibweise $\nabla \cdot g$. Den Gradienten von f bezeichnen wir als $\operatorname{grad} f := \nabla f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_n f)$. Der Laplace-Operator Δ ist gegeben durch $\Delta f := \sum_{i=1}^n \partial_{ii} f$. Einen n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \ldots, n$, nennen wir Multiindex und schreiben $D^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f$.

(a) Berechnen Sie folgende Ableitungen für $f(x, y, z) = x^2 y e^{4z^2+x}$:

- $\operatorname{grad} f$
- Δf
- $D^\alpha f$ für $\alpha = (1, 2, 0)$ und $\alpha = (0, 1, 1)$

(b) Zeigen Sie

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Aufgabe 2 (Produktregeln)

(a) Seien $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u.$$

(b) Seien $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Wir setzen $\operatorname{rot} u := (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$. Häufig sieht man die Schreibweise $\nabla \times u$ für $\operatorname{rot} u$. Zeigen Sie

$$\operatorname{div}(u \times v) = v \operatorname{rot} u - u \operatorname{rot} v.$$

Aufgabe 3 (Klassifikation von Differentialgleichungen)

In Kürze: Eine partielle Differentialgleichung nennen wir

(a) linear, falls die gesuchte Funktion u und all ihre partiellen Ableitungen nur linear auftauchen.

(b) semilinear, falls die höchsten auftretenden partiellen Ableitungen linear vorkommen.

(c) quasilinear, falls die höchsten auftretenden partiellen Ableitungen linear vorkommen, wenn man die Koeffizienten „einfriert".

Seien $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, t) = x^2 + y^2$. Entscheiden Sie, ob die Differentialgleichungen linear, semilinear oder quasilinear sind, und bestimmen Sie die Ordnung der Differentialgleichungen.

$(a)\ u_t + cu_x = 0$	$(b)\ u_t + cu_{tt} = 0$	$(c)\ u_t + cuu_t t = 0$
$(d)\ u_{xx} + u_{yy} - 1 = 0$	$(e)\ u_t + uu_x = 0$	$(f)\ u_{xx} + u_x^2 + u = 0$
$(g)\ u_{xy} + u_x^2 + u = 0$	$(h)\ \lvert\operatorname{grad} u\rvert^2 = 0$	$(i)\ \operatorname{div} u = 0$
$(j)\ u_t = f(u, u_x, t)$	$(k)\ u_t + u\nabla u + \Delta u = 0$	

Aufgabe 4 (Laplace-Operator)

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen u die jeweilige Differentialgleichung lösen.

(a) $u(x) := |x|^{-n+2}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ löst $\Delta u = 0$.

(b) $u(x) := |x|^{-1} e^{\sqrt{\lambda}|x|}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ löst $\Delta u + \lambda u = 0$ für $\lambda \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 5 (Implizite Funktionen)

Es seien x, y Koordinaten auf einer Landkarte und $h(x, y)$ die Höhe über Normalnull. Eine Höhenlinie ist ein Weg $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ in der xy-Ebene mit $h(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = c$ für alle t.
Zeigen Sie, dass der Gradient von h immer senkrecht auf den Höhenlinien steht.
Unter welchen Bedingungen können sich Höhenlinien schneiden? Geben Sie Beispiele an.

Aufgabe 6 (Satz über implizite Funktionen)

- Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x_0, y_0) = 0$ für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Unter welchen Bedingungen existiert eine Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$ und $f(x, g(x)) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0)? Existiert für die Funktion $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4$ im Punkten $(2, 0)$ und $(0, 1)$ solch ein g?
- Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben mit $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ für $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Unter welchen Bedingungen existiert eine Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $h(x_0) = (y_0, z_0)$ und $f(x, h(x)) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0, z_0)?