$X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{A}$.

Definition: $\mathbb{E}[X \mid \mathfrak{F}]$: $\mathfrak{F}$–meßbare Zufallsvariable mit

$$\int_B \mathbb{E}[X \mid \mathfrak{F}] \, d\mathbb{P} = \int_B X \, d\mathbb{P}, \qquad B \in \mathfrak{F}.$$

Rechenregeln 1:

- X, $\mathfrak{F}$ unabhängig $\Rightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathfrak{F}] = \mathbb{E}(X)$.
- X $\mathfrak{F}$–meßbar $\Rightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathfrak{F}] = X$.
- $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathfrak{F}]$ ist linear, monoton, es gilt die monotone Konvergenz.
- $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, dann

  $$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathfrak{G}] \mid \mathfrak{F}] = \mathbb{E}[X \mid \mathfrak{F}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathfrak{F}] \mid \mathfrak{G}].$$

Rechenregeln 2:

- Y $\mathfrak{F}$–meßbar, dann
$$\mathbb{E}\left[X \cdot Y \mid \mathfrak{F}\right] = Y \cdot \mathbb{E}\left[X \mid \mathfrak{F}\right] .$$

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, dann
$$\mathbb{E}\left[\varphi(X) \mid \mathfrak{F}\right] \geq \varphi\Big(\mathbb{E}\left[X \mid \mathfrak{F}\right]\Big) .$$

Nun $X, Y : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$, setze

$$\mathbb{E}[X \mid Y] := \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)] \, .$$

Zentrale Erkenntnis: Es existiert $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar mit

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = g(Y) \, ,$$

Schreibweise:

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] := g(y) \, .$$

Satz: Sei $X \in L_2$, dann ist

$$\mathbb{E}\Big(X - \mathbb{E}[X \mid Y]\Big)^2 = \min_{\varphi} \mathbb{E}\Big(X - \varphi(Y)\Big)^2$$

(Bed. Erw.wert = bester Schätzer im Quadratmittel).

Achtung: $\mathbb{E}\,[X \mid Y+Z] \neq \mathbb{E}\,[X \mid Y]+\mathbb{E}\,[X \mid Z]$ i.A.!

Beispiele: Seien X, Y unabhängig.

- $\mathbb{E}\,[X \mid X] = X$, $\mathbb{E}\,[X \mid Y] = \mathbb{E}\,(X)$.

- $\mathbb{E}\,[X + Y \mid Y] = \mathbb{E}\,(X) + Y$.

Definition: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ von **beschränkter Variation (b.V.)** $:\Leftrightarrow$

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ t_i \in [a,b]}} \sum_{i \le n} |f(t_{i+1} - f(t_i))| < \infty \, .$$

$f : I \to \mathbb{R}$ von b.V. $:\Leftrightarrow$ $f_{|[a,b]}$ b.V. für alle $[a,b] \subseteq I$.

Satz: f von beschränkter Variation $\Leftrightarrow$

$\exists\ f_1, f_2\ : f_i$ monoton wachsend, $f = f_1 - f_2$.

Folgerung: Es ex. $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}$ fast überall, und $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}$ cadlag.

Definition: Für g cadlag, monoton wachsend auf I setze

$$\mu_g(]u,v]) := g(u) - g(v) \ .$$

Satz: Dies definiert ein Borelmaß auf I mit Verteilungsfunktion g.

Definition: $f = f_1 - f_2$ b.V., cadlag:

$$\int_I \cdot \, df(x) := \int_I \cdot \, d\mu_{f_1} - \int_I \cdot \, d\mu_{f_2} \ .$$

Satz: h stetig mit kompaktem Träger $\Rightarrow$

$$\int_I h(x) df(x) = \lim_{\substack{|\Pi| \to 0 \\ \Pi = \{t_1,\ldots,t_n\}}} \sum_{i=1}^{n} h(t_i) \cdot \Big[f(t_{i+1}) - f(t_i) \Big]$$