Skript zur Vorlesung ,,Stochastische Analysis"
Version vom 19.04.2007
J. Creutzig

Kapitel III

Stochastische Integration

Literatur:

Karatzas, Shreve (1999, Chap. 3).

Gegeben:

- $I = [0, \infty[$,
- vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$
- Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$, übliche Voraussetzungen,
- rellwertiger Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$,
- $M = (M_t)_{t \in I}$.

1 Konstruktion des stochastischen Integrals

Ziel: Definiere in sinnvoller Weise

$$\int_I X_s dM_s$$

analog zur Idee des Riemann–Stieltjes Integrals.
Problem: Eine pfadweise Definition ist für größere Klassen von Integranden X nicht möglich, da M in nichttrivialen Fällen von unbeschränkter Variation (s. Bemerkung **??**.**??**) ist.
Lösung: Das Ito–Integral nach M wird ähnlich dem Lebesgue–Stieltjes–Integral eingeführt:

- Definiere $\int$ für ,,Treppenprozesse" X
- Finde Eigenschaften dieser Abbildung $X \mapsto \int X dM$,
- die eine Ausdehnung des Integrales ermöglicht.

1.1 Integral für einfache Prozesse

Idee: $\int_a^b 1 dM_t := Mb - M_a$, dies nun „linear" fortsetzen auf einfache Prozesse.

Definition 1. (i) $X = (X_t)_{t\in I}$ heißt *einfach*, falls es

$$0 = t_0 < t_1 < \dots, \qquad \lim_{i\to\infty} t_i = \infty$$

und Zufallsvariablen ξ_i auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ gibt, so daß

$$\sup_{\omega\in\Omega} \sup_{i\in\mathbb{N}_0} |\xi_i(\omega)| < \infty$$

und

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_0 : \quad \xi_i \ \mathfrak{F}_{t_i}\text{-meßbar},$$

und

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega) \cdot 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t)\ . \tag{1}$$

Bez.: $\mathfrak{L}_0$ – Vektorraum der einfachen Prozesse.

(ii) Für X einfach mit Darstellung (1) setze das *stochastische Integral* von X bzgl. M auf $[0,t]$:

$$\begin{aligned} I_t(X)(\omega) &:= \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(\omega) \cdot (M_{t_{i+1}}(\omega) - M_{t_i}(\omega)) + \xi_n(\omega) \cdot (M_t(\omega) - M_{t_n}(\omega)), \qquad t \in [t_n, t_{n+1}] \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \xi_i \cdot (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}). \end{aligned}$$

Lemma 1. Sei $A = (A_t)_{t\in I}$ stetig und wachsend. Dann sind äquivalent

(i) $\forall\ 0 \le s < t : \quad E((M_t - M_s)^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) = E(A_t - A_s \,|\, \mathfrak{F}_s)$,

(ii) $A = \langle M \rangle$.

Beweis. (ii) gilt genau dann, wenn

$$0 = E(M_t^2 - A_t \,|\, \mathfrak{F}_s) - M_s^2 - A_s = E(M_t^2 - M_s^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) - E(A_t - A_s \,|\, \mathfrak{F}_s)\ .$$

□

Proposition 1.

(i) $I_t(\cdot)$ ist wohldefiniert und linear auf $\mathfrak{L}_0$,

(ii) für $X \in \mathfrak{L}_0$ gilt $(I_t(X))_{t\in I} \in \mathfrak{M}_2^c$ und[1]

$$\langle I(X) \rangle_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M \rangle_u,$$

[1] Das rechts stehende Integral ist pfadweise als klassisches Riemann–Stieltjes–Integral definiert

(iii) für $X \in \mathfrak{L}_0$ gilt

$$E(I_t(X)^2) = E\left(\int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u\right).$$

Beweis. ad (i): klar.

ad (ii): Für $0 \le s < t$ und $i \in \mathbb{N}_0$ gilt[2]

$$E(\xi_i \cdot (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}) \,|\, \mathfrak{F}_s) = \xi_i \cdot (M_{s\wedge t_{i+1}} - M_{s\wedge t_i}).$$

Hiermit folgt die Martingaleigenschaft von $I(X)$, und jetzt ist klar: $I(X) \in \mathfrak{M}_2^c$.

Durch

$$A_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u$$

wird offenbar ein wachsender stetiger Prozeß definiert. Zu zeigen bleibt die Martingaleigenschaft von $I(X)^2 - A$. Gelte $s \in [t_{m-1}, t_m[$ und $t \in [t_n, t_{n+1}[$, also $m - 1 \le n$.

1. Fall: $m - 1 < n$. Dann

$$\begin{aligned} &I_t(X) - I_s(X) \\ &\quad = \xi_{m-1} \cdot (M_{t_m} - M_s) + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i \cdot (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n \cdot (M_t - M_{t_n}). \end{aligned}$$

Gelte $0 \le s < t \le u < v$ und sei Y beschränkt und $\mathfrak{F}_u$-meßbar. Dann

$$E(Y \cdot (M_v - M_u) \cdot (M_t - M_s) \,|\, \mathfrak{F}_u) = 0.$$

Mit Lemma 1 folgt

$$\begin{aligned} &E((I_t(X) - I_s(X))^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) \\ &= E\left(\xi_{m-1}^2 \cdot (M_{t_m} - M_s)^2 + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i^2 \cdot (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \xi_n^2 \cdot (M_t - M_{t_n})^2 \,|\, \mathfrak{F}_s\right) \\ &= E\left(\xi_{m-1}^2 \cdot (\langle M\rangle_{t_m} - \langle M\rangle_s) + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i^2 \cdot (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}) + \xi_n^2 \cdot (\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t_n}) \,|\, \mathfrak{F}_s\right) \\ &= E\left(\int_s^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u \,|\, \mathfrak{F}_s\right) = E(A_t - A_s \,|\, \mathfrak{F}_s). \qquad (2) \end{aligned}$$

Wende nochmals Lemma 1 an.

2.Fall: $m - 1 = n$: Die gleiche Rechnung nur mit dem letzten Summanden.

ad (iii): Wähle $s = 0$ und integriere (2). □

[2] Fallunterscheidung; siehe auch Übung 4.2.

1.2 Fortsetzung des Integrals

Wir definieren zunächst I für eine Klasse von Prozessen, die $\mathfrak{L}_0$ umfaßt, wobei insbesondere die Eigenschaften aus Proposition 1 erhalten bleiben.
Betrachte das durch

$$\mu_M(A) = \int_\Omega \int_0^\infty 1_A(u,\omega)\, d\langle M\rangle_u(\omega)\, dP(\omega)$$

definierte[3] Maßμ_M auf $(I \times \Omega, \mathfrak{B}(I) \otimes \mathfrak{A})$. Im Spezialfall $M = W$ erhält man

$$\mu_W = \lambda \otimes P,$$

wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet.

Definition 2. Sei X meßbar und adaptiert. Setze[4]

$$[X]_t^2 = E\left(\int_0^t X_u^2\, d\langle M\rangle_u\right) = \int_{I\times\Omega} \mathbb{1}_{[0,t]} \cdot X_u^2(\omega)\, \mathrm{d}\mu_M(t,\omega)$$

sowie

$$[X] = \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t} \cdot (1 \wedge [X]_t).$$

Sei $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}^*(M)$ der Vektoraum der progressiv meßbaren Prozesse X mit $[X] < \infty$.

Offenbar ist

$$\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}^*.$$

Wir betrachten fortan stets die durch $[X - Y]$ definierte Semimetrik auf $\mathfrak{L}^*$.
Zwischenziel: $\mathfrak{L}_0 \subseteq \mathfrak{L}^*$ dicht bzgl. $[\cdot]$.

Wir erinnern an den Lebesgueschen Differentiationssatz:

Satz 1 (Lebesgue). Es sei f eine Lebesgue-integrable Funktion auf $(0,\infty)$. Dann gilt für Lebesgue–fast alle Punkte $t > 0$, daß

$$\lim_{h\to 0} \int_{t-h}^{t} f(y)\, \mathrm{d}y = f(t)\ .$$

Lemma 2. Sei X progressiv meßbar, adaptiert und beschränkt durch $c \geq 0$. Weiter sei $\mathfrak{F}$ eine **vollständige**[5] Filtration. Dann existiert eine Folge $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von durch c beschränkten Prozessen in $\mathfrak{L}_0$ mit

$$\forall\, t \in I: \quad \lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^t (X_u - X_u^{(n)})^2\, du\right) = 0.$$

[3] μ_M ist wohldefiniert, siehe Gänssler, Stute (1977, Kap. 1.8), alternativ Übung 9.3.
[4] $[X]_t$ ist L_2-Norm von $1_{[0,t]} \cdot X$ bzgl. μ_M.
[5] nicht unbedingt rechtsstetige!

Beweis.
1. Schritt: X stetig $\Rightarrow$ Behauptung:
Interpolation durch Treppenfunktionen, Lebesguescher Grenzwertsatz.
2. Schritt: X progressiv meßbar $\Rightarrow$ X durch stetige Fkt. approximierbar.
Setze[6]

$$Y_s(\omega) = \int_0^{s\wedge t} X_u(\omega)\, du, \qquad Z_s^{(m)}(\omega) = m \cdot \big(Y_s(\omega) - Y_{(s-1/m)\vee 0}(\omega)\big)$$

für $m \in \mathbb{N}$. Es gilt: Y, $Z^{(m)}$ sind stetig, adaptiert, und damit progressiv meßbar, und $Z^{(m)}$ ist beschränkt durch c. Der Lebesguesche Differentiationssatz sichert

$$\forall\ \omega \in \Omega : \left(\lim_{m\to\infty} Z_\cdot^{(m)}(\omega) = X_\cdot(\omega) \quad \lambda\text{-f.s.}\right),$$

und deshalb

$$\lim_{m\to\infty} Z^{(m)} = X \quad \lambda \otimes P\text{-f.s.}$$

Mit dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt

$$\lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^t (X_u - Z_u^{(m)})^2\, du\right) = 0.$$

□

Proposition 2. $\mathfrak{L}_0$ liegt dicht in $\mathfrak{L}^*$.

Beweis. **Grundidee:** Im wesentlichen sagt Lemma 2 das schon für $\langle M\rangle_t = t$; Übergang zu allgemeinem $\langle M\rangle$ durch *Zeitwechsel*.
Schritt 1: Betrachte statt $[\cdot]$ nur $[\cdot]_T$ (s. Beweis Lemma 2).
Schritt 2: Die beschränkten progressiv meßbaren Prozesse liegen dicht in $\mathfrak{L}^*$ bzgl. $[\cdot]_T \Rightarrow$ nur für beschränkte $X \in \mathfrak{L}^*$ zu zeigen.
Sei also $|X_t(\omega)| \leq C$ für $t \in [0,T], \omega \in \Omega$, und sei OBdA $X_t(\omega) = 0$, $t > T$. Weiter sei OBdA $\langle M\rangle$ sicher[7] nichtfallend, dann ist ist $V_t := \langle M\rangle_t + t$ stetig und bijektiv $[0,\infty[\to [0,\infty[$; sei für $\omega \in \Omega$ $T_s(\omega)$ die Umkehrfunktion[8]. Dann folgt

- $T_s(\omega) \leq s$ (denn $T_s + \langle M\rangle_{T_s} = s$),
- $\forall\ s\ :\ \{T_s \leq t\} = \{\langle M\rangle_t + t \geq s\} \in \mathfrak{F}_t$, also T_s Stopzeit.

Setze $Y_s(\omega) := X_{T_s(\omega)}(\omega)$, $\mathfrak{G}_s := \mathfrak{F}_{T_s}$. $\mathfrak{G}_s$ ist vollständig T_s läßt schreiben als

$$T_s(\omega) = \sup_{\substack{t\leq s\\ t\in\mathbb{Q}}}\ t \cdot \mathbb{1}_{\{\langle M\rangle_t + t \leq s\}}(\omega)\ ,$$

[6]Notation: $\vee$ für max.
[7]statt fast sicher
[8]Das ist der Zeitwechsel

und hieraus erhält man leicht, daß Y progressiv $\mathfrak{G}$–meßbar ist. Folglich dürfen wir Lemma 2 anwenden und erhalten, daß für $\varepsilon > 0$ und $R \in \mathbb{R}$ stets ein $Y^\varepsilon \in \mathfrak{L}_0$ existiert, sodaß

$$\mathbb{E}\int_0^R |Y_s - Y_s^\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}s < \varepsilon/2 \, .$$

Weil aber wegen $X_t(\omega) \le C$, $X_t = 0, t > T$ leicht folgt, daß

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^\infty |Y_s|^2 \, \mathrm{d}s &= \mathbb{E}\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{T_s \le T\}} |X_{T_s}|^2 \, \mathrm{d}s \\
&= \mathbb{E}\int_0^{\langle M\rangle_T + T} |X_{T_s}|^2 \, \mathrm{d}s \\
&\le C(\mathbb{E}\,\langle M\rangle_T + T) < \infty \, ,
\end{aligned}$$

kann man für hinreichend großes R ein $Y^\varepsilon \in \mathfrak{L}_0$ finden mit

$$\mathbb{E}\int_0^\infty |Y_s - Y_s^\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}s < \varepsilon \, , \qquad Y_s^\varepsilon = 0, s \ge s_0 \, .$$

Wir können Y_s^ε als endliche Summe schreiben,

$$Y_s^\varepsilon = \xi_0 \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{j=1}^n \xi_{s_{j-1}} \cdot \mathbb{1}_{]s_{j-1}, s_j]}(s) \, ,$$

mit ξ_{s_j} meßbar bzgl. $\mathfrak{G}_{s_j} = \mathfrak{F}_{T_{s_j}}$ und beschränkt. Nun machen wir den Zeitwechsel rückgängig;

$$X_t^\varepsilon := Y^\varepsilon_{\langle M\rangle_t + t} = \xi_0 \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^n \xi_{s_{j-1}} \cdot \mathbb{1}_{]T_{s_{j-1}}, T_{s_j}]}(t) \, .$$

Man verifiziert leicht, daß X^ε meßbar und adaptiert ist. Weiter können wir abschätzen:

$$\mathbb{E}\int_0^T |X_t^\varepsilon - X_t|^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_t \le \mathbb{E}\int_0^T |X_t^\varepsilon - X_t|^2 \, \mathrm{d}(\langle M\rangle_t + t) \le \mathbb{E}\int_0^\infty |Y_s^\varepsilon - Y_s|^2 \, \mathrm{d}s < \varepsilon \, .$$

Dummerweise ist X_t^ε kein einfacher Prozeß; daher müssen wir noch zu guter Letzt zeigen:

Behauptung: Ein Prozeß der Gestalt

$$\eta_t := \xi_{s_{j-1}} \cdot \mathbb{1}_{]T_{s_{j-1}}, T_{s_j}]}(t)$$

läßt sich durch einfache Prozesse approximieren.

Dies geschieht durch Zeitdiskretisierung. Der Einfachheit halber sei $s_{j-1} = 1$, $s_j = 2$. Setze

$$T_i^m := \sum_{k=1}^{2^{m+1}+1} \frac{k}{2^m} \mathbb{1}_{](k-1)/2^m, k/2^m]}(T_i), \qquad i = 1, 2 \, ,$$

und definiere

$$\eta_t^m := \xi_1 \cdot \mathbb{1}_{]T_1^m, T_2^m]}(t) = \sum_{k=1}^{2^{m+1}+1} \xi_1 \cdot \mathbb{1}_{T_1 < (k-1)/2^m \le T_2} \mathbb{1}_{]k-1)/2^m, k/2^m]}(t) \, .$$

Nun ist ξ_1 $\mathfrak{F}_{T_1}$–meßbar; damit ist $\xi_1 \cdot \mathbb{1}_{\{T_1<(k-1)/2^m\}} \in \mathfrak{F}_{(k-1)/2^m}$, und hieraus folgt sofort, daß $\eta^m \in \mathfrak{L}_0$. Weiter ist

$$\eta_t - \eta_m^t = \xi_1 \cdot (\mathbb{1}_{]T_1,T_1^m]} - \mathbb{1}_{]T_2,T_2^m]})(t) ,$$

und damit ist

$$\int_0^\infty |\eta_t - \eta_t^m|^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_t \le K^2(\langle M\rangle_{T_1^m} - \langle M\rangle_{T_1} + \langle M\rangle_{T_2^m} - \langle M\rangle_{T_2}) .$$

Die rechte Seite geht fast sicher gegen 0 für $m \to \infty$ und ist durch $2K^2\langle M\rangle_3$ beschränkt; folglich geht sie im Erwartungswert gegen 0, und also

$$\mathbb{E} \int_0^\infty |\eta_t - \eta_t^m|^2 \, \mathrm{d}t \to 0 ,$$

wie gewünscht. □

Bemerkung 1. Falls das Martingal eine glatte quadratische Variation hat, so läßt sich noch eine größere Klasse von Prozessen durch einfache approximieren. Es sei $\mathfrak{L}$ die Menge der meßbaren Prozesse X mit $[X] < \infty$. Falls gilt: $\langle M\rangle_\cdot(\omega)$ ist absolutstetig bzgl. λ $\mathbb{P}$–f.s., so liegt $\mathfrak{L}_0$ sogar dicht in $\mathfrak{L}$, s.Karatzas/Shreve, p.134, Prop.2.6.

Definition 3. Für $Y \in \mathfrak{M}_2^c$ sei

$$\|Y\|_t^2 = E(Y_t^2), \qquad t \in I.$$

sowie

$$\|Y\| = \sum_{t=1}^\infty 2^{-t} \cdot (1 \wedge \|Y\|_t).$$

Beachte: für $Y \in \mathfrak{M}_2^c$ ist $t \mapsto E(Y_t^2)$ monoton wachsend. Wir identifizieren im folgenden ununterscheidbare Elemente aus $\mathfrak{M}_2^c$.

Proposition 3. $\mathfrak{M}_2^c$ ist ein vollständiger metrischer Raum bzgl. der durch $(Y, Z) \mapsto \|Y - Z\|$ definierten Metrik.

Beweis. Übung 10.3, s.a. Karatzas, Shreve (1999, p. 37–38). □

Wir betrachten fortan stets obige Metrik auf $\mathfrak{M}_2^c$.

Satz 2. Die in Definition 1 eingeführte lineare Abbildung

$$I : \mathfrak{L}_0 \to \mathfrak{M}_2^c$$

läßt sich eindeutig zu einer linearen Abbildung

$$I : \mathfrak{L}^* \to \mathfrak{M}_2^c$$

mit

$$\forall\, t \in I : \quad \|I(X)\|_t = [X]_t \tag{3}$$

fortsetzen. Es gilt wiederum

$$\langle I(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u. \tag{4}$$

Beweis. $I.$ ist auf einem linearen dichten Teilraum von $\mathfrak{L}^*$ definiert und nach Satz 1 stetig, also existiert eine eindeutige stetige lineare Fortsetzung $I. : \mathfrak{L}^* \to \mathfrak{M}_2^c$ (Zielraum vollständig), und auch (3) folgt sofort. Sei nun $X^n \to X$ in $\mathfrak{L}^*$, $X^n \in \mathfrak{L}_0$, und sei $0 \leq s < t$, $A \in \mathfrak{F}_s$. Man erhält[9] unter Verwendung von (2)

$$\begin{aligned}\int_A \big(I_t(X) - I_s(X)\big)^2 \, dP &= \lim_{n\to\infty} \int_A \big(I_t(X^{(n)}) - I_s(X^{(n)})\big)^2 \, dP \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_A \int_s^t \big(X_u^{(n)}\big)^2 \, d\langle M\rangle_u \, dP \\ &= \int_A \int_s^t (X_u)^2 \, d\langle M\rangle_u \, dP.\end{aligned}$$

Also gilt auch für $X \in \mathfrak{L}^*$

$$E((I_t(X) - I_s(X))^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) = E\bigg(\int_s^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u \,|\, \mathfrak{F}_s\bigg).$$

Wende Lemma 1 an, um $\langle I(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u$ zu erhalten. □

Definition 4. Für $X \in \mathfrak{L}^*$ heißt $(I_t(X))_{t\in I}$ das *stochastische Integral (Ito-Integral)* von X bzgl. M. Bez:

$$I_t(X) = I_t^M(X) = \int_0^t X_u \, dM_u.$$

Bemerkung 2. Unter den Voraussetzungen von Bemerkung 1 gilt Satz 2 mit $\mathfrak{L}$ statt $\mathfrak{L}^*$, so daß das stochastische Integral auf $\mathfrak{L}$ erklärt ist. Die in beiden Fällen gültige Beziehung (3) heißt *Ito-Isometrie.*

Wir benötigen noch eine weitere Ausdehnung der zulässigen Integranden:
Bezeichne mit $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}^*(M)$ den Vektorraum der progressiv meßbaren Prozesse X mit

$$\forall\, t \in I : \quad \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u < \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Klar

$$\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{P}^*$$

und

$$X \text{ stetig, adaptiert} \quad \Rightarrow \quad X \in \mathfrak{P}^*.$$

Es gilt $\mathfrak{L}^*(W) \neq \mathfrak{P}^*(W)$.

Ziel: Fortsetzung des stochastischen Integrals auf $\mathfrak{P}^*$. **Methode:** Lokalisation.

Im folgenden: $X \in \mathfrak{P}^*$. Für Stoppzeiten T sei[10]

$$X_t^{(T)} = \begin{cases} X_t, & \text{falls } t \leq T \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

[9] Aus $Z_n \to Z$ in L_p folgt $E(1_B \cdot Z_n^p) \to E(1_B \cdot Z^p)$.
[10] 'X killed at T', im Gegensatz zu 'X stopped at T'

Lemma 3. (i) Für Stoppzeiten S, T gelte $X^{(S)}, X^{(T)} \in \mathfrak{L}^*$. Dann folgt für $t \in I$

$$I_{t \wedge S \wedge T}(X^{(T)}) = I_{t \wedge S \wedge T}(X^{(S)}).$$

(ii) Ist $X \in \mathfrak{L}^*$, so auch $X^{(S)}$, und

$$I_t(X^{(S)}) = I_{t \wedge S}(X) = I_t \; .$$

Beweis. (i): Für

$$Z = I(X^{(T)}) - I(X^{(S)}) = I(X^{(T)} - X^{(S)}) \in \mathfrak{M}_2^c$$

gilt

$$\langle Z \rangle_t = \int_0^t \left(X_u^{(T)} - X_u^{(S)} \right)^2 \, d\langle M \rangle_u$$

und somit

$$\langle Z \rangle_{S \wedge T} = 0.$$

Mit Übung 5.2 folgt

$$Z_{t \wedge S \wedge T} = 0.$$

(ii): Übung. □

Betrachte Stoppzeitenfolge[11] $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

(i) $\forall \, n \in \mathbb{N}: \quad T_n \leq T_{n+1}$,

(ii) P-f.s. $\lim_{n \to \infty} T_n = \infty$,

(iii) $\forall \, n \in \mathbb{N}: \quad X^{(T_n)} \in \mathfrak{L}^*$.

Zu $t \in I$ und $\omega \in \{\lim_{n \to \infty} T_n = \infty\}$ wähle man $n \in \mathbb{N}$ mit $T_n(\omega) \geq t$ und setze

$$I_t(X)(\omega) = I_t(X^{(T_n)})(\omega).$$

Lemma 3 sichert die Unabhängigkeit von der Wahl von n und der Stoppzeitenfolge; weiter ist diese Definition für $X \in \mathfrak{L}^*$ auch konsistent mit der bisherigen Definition von I_t. Insbesondere folgt für jede solche Wahl von T_n und $X \in \mathfrak{P}^*$, daß mit Wahrschienlichkeit 1 gilt:

$$\forall t \geq 0 \ : \ I_t(X^{(T_n)}) \to I_t(X) \; . \tag{5}$$

Definition 5. Für $X \in \mathfrak{P}^*$ heißt $(I_t(X))_{t \in I}$ das *stochastische Integral (Ito-Integral)* von X bzgl. M. Bez. wie oben.

[11] z.B.

$$T_n = \sup\{t \ : \ \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \leq n\}$$

Bemerkung 3. Auf diese Weise: Fortsetzung des stochastischen Integrals auf $\mathfrak{P}^*$; $I(X)$ ist stetig und adaptiert mit $I_0(X) = 0$. Ferner $I_{t\wedge T_n}(X) = I_{t\wedge T_n}(X^{(T_n)})$, also

$$I_{\cdot\wedge T_n}(X) \in \mathfrak{M}_2^c.$$

Es gilt jedoch i.a. nicht $I(X) \in \mathfrak{M}_2^c$, siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 36).

Definition 6. Adaptierter Prozeß $(X_t)_{t\in I}$ *lokales Martingal*, falls Stoppzeitenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (i) und (ii) existiert, so daß $X_{\cdot\wedge T_n}$ Martingal für $n \in \mathbb{N}$.

Also ist $I(X)$ für $X \in \mathfrak{P}^*$ ein lokales Martingal. Siehe Karatzas, Shreve (1999, Sec. 3.2.D) zur Integration bzgl. stetiger lokaler Martingale.

Bemerkung 4. Ein 'Riemannscher' Zugang zum Ito–Integral ist auch möglich: Betrachte Zerlegungen $\pi_m = \{t_0^{(m)}, \ldots, t_m^{(m)}\}$ mit

$$0 = t_0^{(m)} < \cdots < t_m^{(m)} = t, \qquad \lim_{m\to\infty} \|\pi_m\| = 0.$$

Kurz: $t_i = t_i^{(m)}$. Wenn $X \in \mathfrak{M}_2^c$, so gilt [12]

$$\int_0^t X_u dW_u = \lim_{m\to\infty} \sum_{i<m} X_{t_i^m} \cdot (W_{t_{i+1}^m} - W_{t_i^m})$$

im L_2–Sinne.

Achtung: Anders als beim Riemann–Stieltjes–Integral erhält man **andere** Limiten, wenn man statt $X_{t_i^m}$ Zwischenpunkte einsetzt. Die Wahl $(t_i^m + t_{i+1}^m)/2$ z.B. führt zum *Stratonovich–Integral*. Die Wahl t_i^m, die zum Ito–Integral führt, ist die einzige, welche die Martingaleigenschaft des Integrals garantiert.

Satz 3. Gelte $M, N \in \mathfrak{M}_2^c$ und $X \in \mathfrak{L}^*(M)$ sowie $Y \in \mathfrak{L}^*(N)$. Dann folgt

$$\langle I^M(X), I^N(Y)\rangle_t = \int_0^t X_u \cdot Y_u \, d\langle M, N\rangle_u, \qquad t \in I.$$

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 144). Diese Eigenschaft, für $Y = 1$ (also $I^N(Y) = N$), charakterisiert bereits das stochastische Integral, s. Revuz/Yor, p.137. □

Satz 4. Sei $M \in \mathfrak{M}_2^c$, $X \in \mathfrak{L}^*(M)$ und

$$N_t = \int_0^t X_u \, dM_u, \qquad t \in I.$$

Ferner sei $Y \in \mathfrak{L}^*(N)$. Dann: $XY \in \mathfrak{L}^*(M)$ und

$$\int_0^t Y_u \, dN_u = \int_0^t X_u Y_u \, dM_u, \qquad t \in I.$$

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 145). □

Beide Sätze lassen sich unpräzise, aber memnomisch günstiger in 'dx–Sprache' merken:

$$\langle dM, dN\rangle = d\langle M, N\rangle \ ,$$

bzw.

$$d\Big(\int X_u \, dM_u\Big) = X_u \, dM_u \ .$$

[12] Karatzas/Shreve, p.156

2 Die Ito-Formel

Viele Regeln der Ito-Integration sind analog zur klassischen Lebesgue–Stieltjes–Integration, z.B. gilt der 'Hauptsatz'

$$M_t = M_0 + \int_0^t dM_t \ .$$

Erstaunlicherweise ist die Kettenregel[13] aber im Ito–Kalkül *falsch*.
Wir betrachten Prozesse X der Form

$$X_t = X_0 + M_t + B_t, \qquad t \in I, \tag{6}$$

wobei

(i) X_0 $\mathfrak{F}_0$-meßbar,

(ii) $M = (M_t)_{t\in I} \in \mathfrak{M}_2^c$,

(iii) $B = (B_t)_{t\in I}$ adaptiert, stetig mit $B_0 = 0$ und von beschränkter Variation auf jedem kompakten Intervall.

Wir schreiben (6) mitunter auch in der unpräzisen Kurzform $dX_t = dM_t + dB_t$.

Bemerkung 5. Prozesse der Form (6) sind (spezielle) stetige *Semimartingale.*[14] Obige Zerlegung ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit. In zeit-kontinuierlichen Finanzmärkten werden Preisprozesse in der Regel als Semimartingale modelliert.

Beispiel 1. Mit $N \in \mathfrak{M}_2^c$, $Y \in \mathfrak{L}^*(N)$, Z progressiv meßbar und lokal Lebesgue-integrierbar:

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y_u \, dN_u + \int_0^t Z_u \, du.$$

Bezeichnung: *Ito-Prozeß*, Kurzschreibweise:

$$dX_t = Y_u dN_u + Z_u du \ .$$

Für *stetige* Prozesse H in $\mathfrak{P}^*(N)$ sind sowohl die Integrale 'nach dN_u' als auch 'nach dB_u' wohldefiniert (ersteres als Ito–, letzteres als Lebesgue–Stieltjes–Integral); wir definieren daher für $X_t = X_0 + M_t + B_t$

$$\int_0^t H_u dX_u := \int_0^t H_u dM_u + \int_0^t H_u dB_u \ .$$

Weiter setzen wir[15]

$$\langle X \rangle := \langle M \rangle \ .$$

[13] In integraler Form: Für $f \in C^1$, g von beschränkter Variation gilt

$$f(g(t)) = f(g(0)) + \int_0^t f'(g(u)) dg(u) \ .$$

[14] Allgemein: M stetiges *lokales Martingal.*

[15] Dies ist auch das Ergebnis, wenn man die pfadweise quadratische Variation ausrechnet.

Satz 5. [Ito/Kunita–Watanabe] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei X von der Form (6). Dann folgt

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u)\, dX_u + \tfrac{1}{2} \int_0^t f''(X_u)\, d\langle X\rangle_u, \qquad t \in I.$$

Auch diese Gleichung wird oft unpräzise

$$df(X_t) = f'(X_u) dX_u + \tfrac{1}{2} f''(X_u) d\langle X\rangle_u$$

abgekürzt.

Bemerkung 6. Insbesondere erhält man aus diesem Satz, daß
$\boxed{f(X_t) \text{ wieder ein Semimartingal ist}}$.

Beweisskizze. Vorab: Für $k = 1, 2$ sind die Prozesse $f^{(k)} \circ X$ stetig und progressiv meßbar. Die Lebesgue-Stieltjes Integrale bzgl. dB_u und $d\langle M\rangle_u$ sind daher pfadweise wohldefiniert.
Betrachte Zerlegung $0 = t_0 < \cdots < t_m = t$ von $[0, t]$. Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=1}^m f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}}) \cdot (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^m f''(\eta_k) \cdot (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2, \end{aligned}$$

wobei $\eta_k(\omega)$ zwischen $X_{t_{k-1}}(\omega)$ und $X_{t_k}(\omega)$. Unter geeigneten Beschränktheitsvoraussetzungen konvergiert die erste Summe im Quadratmittel gegen

$$\int_0^t f'(X_u)\, dM_u + \int_0^t f'(X_u)\, dB_u$$

und die zweite Summe gegen

$$\int_0^t f''(X_u)\, d\langle M\rangle_u.$$

Letzteres ist plausibel, da B glatter als M ist. Etwas genauer: für jede Zerlegung π wie oben gilt

$$V_t^{(2)}(B; \pi) \leq \sup_{k=1,\dots,m} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \cdot V_t^{(1)}(B; \pi) \leq \left(V_t^{(1)}(B; \pi)\right)^2.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\forall\, \omega \in \Omega \;\; \exists\, K > 0 : \quad \sup_\pi V_t^{(1)}(B; \pi)(\omega) \leq K.$$

Wir nehmen an, daß

$$\exists\, K > 0 : \quad \sup_{\omega \in \Omega} \sup_\pi V_t^{(1)}(B; \pi)(\omega) \leq K.$$

Dann sichert der Lebesguesche Grenzwertsatz

$$\lim_{n\to\infty} E\left(V_t^{(2)}(B;\pi_n)\right)^2 = 0$$

für alle Folgen von Partitionen mit $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n\| = 0$. Im allgemeinen Fall: Lokalisation. Details bei Karatzas, Shreve (1999, p. 149–153). □

Beispiel 2. Wähle $f(x) = x^2$, $X = M = W$ (Wienerprozeß) und $B = 0$. Dann

$$W_t^2 = \int_0^t 2\, W_u\, dW_u + t,$$

also

$$\int_0^t W_u\, dW_u = 1/2(W_t^2 - t)\ .$$

Satz 5 enthält die Grundversion der *Ito-Formel*. Allgemeinere Varianten, deren Beweise ähnlich wie der oben skizzierte verlaufen, lauten wie folgt.

Satz 6. Sei $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen

$$f_t = f^{(1,0)}, \quad f_x = f^{(0,1)}, \quad f_{xx} = f^{(0,2)}$$

und sei X von der Form (6). Dann folgt

$$\begin{aligned} f(t, X_t) =& f(0, X_0) + \int_0^t f_t(u, X_u)\, du + \int_0^t f_x(u, X_u)\, dM_u + \int_0^t f_x(u, X_u)\, dB_u \\ & + \tfrac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(u, X_u)\, d\langle M\rangle_u, \qquad\qquad t \in I. \end{aligned}$$

Nun zur Ito-Formel für $\mathbb{R}^d$-wertige Prozesse X, die komponentenweise von der Form (6) sind. Betrachte Abbildungen $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen

$$f^{(1,0)} \text{ mit } 0 \in \mathbb{N}_0^d, \qquad f^{(0,\alpha)} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ und } |\alpha| \leq 2.$$

Die Bezeichnungen f_t, f_{x_i} und $f_{x_i x_j}$ sind kanonisch. Gelte

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + M_t^{(i)} + B_t^{(i)}, \qquad t \in I,\ i \in \{1, \dots, d\},$$

so daß $X_0^{(i)}$ $\mathfrak{F}_0$-meßbar, $M^{(i)} \in \mathfrak{M}_2^c$, $B^{(i)}$ stetig, adaptiert mit beschränkter Variation auf beliebigen kompakten Intervallen und $B_0^{(i)} = 0$.

Satz 7. Unter obigen Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(t, X_t) =& f(0, X_0) + \int_0^t f_t(u, X_u)\, du \\ & + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(u, X_u)\, dM_u^{(i)} + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(u, X_u)\, dB_u^{(i)} \\ & + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t f_{x_i x_j}(u, X_u)\, d\langle M^{(i)}, M^{(j)}\rangle_u, \qquad\qquad t \in I. \end{aligned}$$

Ein nützlicher Spezialfall ist:

Satz 8 (partielle Integration).

$$X_t^{(1)} \cdot X_t^{(2)} = X_0^{(1)} \cdot X_0^{(2)} + \int_0^t X_s^{(1)}\, dX_s^{(2)} + \int_0^t X_s^{(2)}\, dX_s^{(1)} + \langle M^{(1)}, M^{(2)} \rangle_t, \qquad t \in I.$$

Beweis. Ito-Formel mit $f(t, x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. $\square$