Skript zur Vorlesung „Stochastische Analysis"
Version vom 19.04.2007
J. Creutzig

Kapitel II

Stetige Versionen und die Brownsche Bewegung

Die Brownsche Bewegung ist das Grundmodell eines Diffusionsprozesses; wir geben zwei Konstruktionen an und debattieren Pfadeigenschaften.

1 Stetige Versionen

Bemerkung 1. Nach Satz 5 existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathbb{R}^I, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I$, sodaß für die Koordinatenabbildung $\widetilde{W}_t(\omega) := \omega(t)$ gilt:

(i) $\widetilde{W}_0 = 0$ P-f.s.,

(ii) $\widetilde{W}$ besitzt (unter P) unabhängige Inkremente,

(iii) $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s$ ist (unter P) $N(0, t-s)$-verteilt für $0 \leq s < t$.

Problem: Der Pfadraum von $\widetilde{W}$ ist viel zu groß. Die anderen Eigenschaften der Brownschen Bewegung (bzgl. der kanonischen Filtration) sind hingegen erreicht.
Frage: Gilt $C(I) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I$ und $P(C(I)) = 1$? *Antwort:* Nein, es ist im Gegenteil

$$\forall\ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I : \quad A \subset C(I) \quad \Rightarrow \quad A = \emptyset.$$

Lösung: Übergang von $\widetilde{W}$ zu einer 'besseren' Modifikation[1].

Satz 1 (Kolmogorov-Chentsov). Ein Prozeß $(\widetilde{X}_t)_{t\in[0,t]}$ möge erfüllen:

$$\exists\ \alpha, \beta > 0 : \sup_{s,t\in[0,t]} \frac{E|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t|^\alpha}{|s-t|^{1+\beta}} < \infty.$$

Dann existiert für jedes $\gamma < \beta/\alpha$ eine Modifikation $(X_t)_{t\in[0,t]}$ von $\widetilde{X}$, sodaß

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\neq s} \frac{|X_s - X_t|}{|s-t|^\gamma}\right)^\alpha < \infty\ . \tag{1}$$

Insbesondere sind alle Pfade von X Hölder-stetig mit Exponent γ.

[1] Erinnerung: X ist Modifikation von Y gdw. $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ für alle t.

Beweis. Der Einfachheit halber sei $t = 1$. Für $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$D_m := \{\frac{i}{2^m} \ : \ i = 0, \ldots, 2^m - 1\}$$

und $D := \bigcup_m D_m$. Weiter sei

$$\Delta_m := \{(s,t) \ : s,t \in D_m, |s-t| \le 2^{-m}\} \ .$$

Offenbar gilt $|\Delta_m| \le 3 \cdot 2^m$. Wir definieren nun die zufälligen Größen

$$S_j := \sup_{(s,t)\in\Delta_j} |\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t| \ .$$

Die Voraussetzung garantiert, daß

$$\mathbb{E} S_j^\alpha \le \sum_{(s,t)\in\Delta_j} \mathbb{E}|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t|^\alpha \le C \cdot 3 \cdot 2^{j-j(1+\beta)} \le (3C)2^{-\beta j} \ . \tag{2}$$

Für $s \in D$ und $m \in \mathbb{N}$ setze $s_m = 2^{-m}(\lfloor 2^m \cdot s \rfloor) \in D_m$, wobei $\lfloor x \rfloor$ die Gaußklammer sei. Dann gilt $s_m \le s$ und $|s - s_m| \le 2^{-m}$ sowie $(s_m, s_{m+1}) \in \Delta_{m+1}$ für alle m, und $s_m = s$ für $m \ge m_0(s)$. Seien nun $t, s \in D$ mit $|t-s| \le 2^{-m}$. Dann folgt $(s_m, t_m) \in \Delta_{m-1}$, und wegen

$$\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t = \sum_{m\le j\le m_0(s)} (\widetilde{X}_{s_{j+1}} - \widetilde{X}_{s_j}) + \widetilde{X}_{s_m} - \widetilde{X}_{t_m} + \sum_{m\le j\le m_0(t)} (\widetilde{X}_{t_j} - \widetilde{X}_{t_{j+1}}) \ ,$$

erhalten wir

$$|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t| \le S_{m-1} + 2\sum_{j>m} S_j \le 2 \sum_{j\ge m-1} S_j \ .$$

Nun sei $M_\gamma := \sup\{|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s|/|t-s|^\gamma \ : \ s,t \in D, s \ne t\}$; dann folgt

$$\begin{aligned}
M_\gamma &\le \sup_{m\in\mathbb{N}}\{2^{(m+1)\gamma} \sup\{|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s| \ : \ s,t \in D, s \ne t\}\} \\
&\le \sup_{m\in\mathbb{N}}\{2 \cdot 2^{(m+1)\gamma}\Big(\sum_{j=m-1}^\infty S_j\Big)\} \\
&\le 2^{1+\gamma}\sum_{j=0}^\infty 2^{j\gamma} S_j \ .
\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Ist $\alpha < 1$, so ist $(x+y)^\alpha \le x^\alpha + y^\alpha$, und damit folgt

$$\mathbb{E} M_\gamma^\alpha \le 2^{\alpha+\alpha\gamma} \sum_{j=0}^\infty 2^{j\alpha\gamma} \mathbb{E} S_j^\alpha \le \widetilde{C} \sum_{j=0}^\infty 2^{j(\alpha\gamma-\beta)} < \infty \ .$$

Ist $\alpha \ge 1$, so argumentiert man analog, daß $(\mathbb{E} M_\gamma^\alpha)^{1/\alpha} < \infty$. Insbesondere gilt für fast alle $\omega \in \Omega$, daß $\widetilde{X}_.$ gleichmässig stetig ist auf D; sei also $\Omega_0 \in \mathfrak{A}$, $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, sodaß für $\omega \in \Omega_0$ der Pfad $\widetilde{X}_t(\omega)$ stetig ist. Wir definieren

$$X_t(\omega) := \begin{cases} 0 & \omega \notin \Omega_0 \ , \lim_{\substack{s\to t \\ s\in D}} \widetilde{X}_s(\omega) \ . \end{cases}$$

Offenbar hat X gleichmäßig stetige Pfaden auf $[0,1)$ und ist stetig nach $[0,1]$ fortsetzbar. Weiter ist sicher

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\ne s} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\gamma}\Big)^\alpha = \mathbb{E}\Big(\sup_{\substack{t\ne s \\ t,s\in D}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\gamma}\Big)^\alpha < \infty \ ,$$

und es bleibt zu zeigen, daß für jedes feste t gilt: $\mathbb{P}(X_t = \widetilde{X}_t) = 1$. Sei s_m eine Folge in D mit $s_m \to t$. Aus der Voraussetzung folgt, daß $\widetilde{X}_{s_m} \to \widetilde{X}_t$ in L_α, und nach Fatous Lemma existiert eine Teilfolge $s_{\pi(m)}$, sodaß $\widetilde{X}_{s_{\pi(m)}} \to \widetilde{X}_t$ fast sicher; andererseits gilt mit Wahrscheinlichkeit 1, daß $\widetilde{X}_{s_{\pi(m)}} = X_{s_{\pi m}}$ für alle m, also folgt

$$\mathbb{P}(\widetilde{X}_{s_{\pi m}} \to X_t) = 1 \ ,$$

und damit $\mathbb{P}(X_t = \widetilde{X}_t) = 1$. ☐

Korollar 1. Ist $(\widetilde{X}_t)_{t\in[0,\infty[}$ ein stochastischer Prozeß mit

$$\exists \ \alpha, \beta > 0 : \sup_{s,t\in[0,t]} \frac{E|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t|^\alpha}{|s-t|^{1+\beta}} < \infty \ ,$$

so existiert für jedes $\gamma < \beta/\alpha$ eine Modifikation X von $\widetilde{X}$, die lokal γ–Hölderstetig ist.

Satz 2. Es existiert eine Brownsche Bewegung; diese kann als $B = (B_t)$ mit $B_t : (\mathbb{R}^I, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I, Q) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}\mathbb{R})$ und Filtration $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^B$ gewählt werden.

Für jedes $\gamma < \frac{1}{2}$ sind die Pfade einer Brownschen Bewegung f.s. lokal Hölder-stetig mit Exponent γ, siehe Übung 8.1. Wir sehen später, daß diese Glattheitsaussage scharf – bis auf logarithmische Terme – ist.

2 Das Wiener Maß und das Donskersche Invarianzprinzip

2.1 Das Wiener-Maß

Zunächst: das kanonische Modell für die Brownsche Bewegung.

Setze

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \max_{t\in[0,n]} \min(|f_1(t) - f_2(t)|, 1), \qquad f_i \in C(I).$$

Proposition 1. $(C(I), \rho)$ ist ein vollständiger separabler metrischer Raum[2].

Beweis. Unter Verwendung der entsprechenden Eigenschaften im kompakten Fall. ☐

[2]Konvergenz: gleichmäßige Konvergenz auf beliebigen Kompakta.

Wir betrachten im folgenden stets obige Metrik auf $C(I)$ und die zugehörige Topologie samt Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}(C(I))$.[3]

Auf $C(I)$ sind die Dirac–Funktionale, $\delta_t(f) := f(t)$, lineare stetige Funktionale. Sie erzeugen die Borel–σ–Algebra:

Proposition 2.

$$\mathfrak{B}(C(I)) = \sigma(\{\delta_t : t \in I\}).$$

Beweis. Da δ_t sogar stetig ist, folgt sofort

$$\mathfrak{G} := \sigma(\{\delta_t \ : \ t \in I\}) \subseteq \mathfrak{B}(C(I)) \ .$$

Andererseits ist für festes f die Abbildung

$$g \mapsto \rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{t \in [0,n] \cap \mathbb{Q}} \min(|\delta_t(f-g)|, 1)$$

sicher $\mathfrak{G}$–meßbar. Ist $B_r(g)$ die offene Kugel um g mit Radius r, so folgt daher

$$B_r(g) = (\rho(g,\cdot))^{-1}(-r,r) \in \mathfrak{G} \ .$$

Da $C(I)$ separabel ist, gibt es eine abzählbare Umgebungsbasis aus offenen Kugeln, und diese erzeugt $\mathfrak{B}(C(I))$; da jede offene Kugel in $\mathfrak{G}$ liegt, folgt hieraus $\mathfrak{B}(C(I)) \subseteq \mathfrak{G}$. □

Obige Ergebnisse gelten analog[4] im Falle einer Indexmenge $[0,t]$. Für $A \subset C(I)$

$$A \in \sigma(\{f \mapsto f(t) : t \in [0,t]\}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, B \in \mathfrak{B}(C([0,t])) : A = \{f|_{[0,t]} \in B\}. \qquad (3)$$

Betrachte Prozeß $(X_t)_{t \in I}$ mit stetigen Pfaden auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist

$$\Psi : \Omega \to C(I) : \omega \mapsto X_\cdot(\omega)$$

wohldefiniert und Proposition 2 sichert die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}(C(I))$-Meßbarkeit von Ψ.

Definition 1. In obiger Situation heißt ΨP die *Verteilung*[5] von X (auf dem Raum $(C(I), \mathfrak{B}(C(I)))$).

Lemma 1. Gegeben Prozesse $X^{(i)}$ auf $(\Omega^{(i)}, \mathfrak{A}^{(i)}, P^{(i)})$ mit stetigen Pfaden, $i = 1, 2$. Dann sind äquivalent

(i) $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ besitzen dieselben endlich-dimensionalen Randverteilungen,

(ii) die Verteilungen von $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ stimmen überein.

[3] Also: $C(I)$ polnischer Raum. Erinnerung: Regularität von endlichen Borel-Maßen auf polnischen Räumen, reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten.

[4] Normierter Raum $(C([0,t]), \|\cdot\|_\infty)$.

[5] $\Psi P(A) = P(\Psi^{-1}A) = P(\{\omega \in \Omega : X_\cdot(\omega) \in A\})$ für $A \in \mathfrak{B}(C(I))$.

Beweis. „(ii) ⇒ (i)“ klar.

„(i) ⇒ (ii)“: Die Zylindermengen

$$\{f \in C(I) : (f(t_1), \ldots, f(t_n)) \in A\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $t_i \in I$ und $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ bilden gemäß Proposition 2 einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathfrak{B}(C(I))$. Nach Voraussetzung stimmen hierauf die Verteilungen von $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ überein. Verwende den Eindeutigkeitssatz für Wahrscheinlichkeitsmaße, siehe Gänssler, Stute (1977, Satz 1.4.10) oder *Pr.Th. 06/07*, Thm.I.4.4. □

Definition 2. Das *Wiener-Maß* P_* ist die Verteilung einer Brownschen Bewegung.

Wir halten fest: der durch $W_t(f) = f(t)$ auf $(C(I), \mathfrak{B}(C(I)), P_*)$ definierte Prozeß ist eine Brownsche Bewegung bezüglich seiner kanonischen Filtration; genannt: *das kanonische Modell der Brownschen Bewegung.*

2.2 Schwache Konvergenz

Im folgenden: (M, ρ) metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}(M)$. Bez.: $\mathfrak{M}(M)$ Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(M, \mathfrak{B}(M))$.

Definition 3. Folge $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}(M)$ *konvergiert schwach* gegen $P \in \mathfrak{M}(M)$, falls

$$\lim_{n \to \infty} \int_M \phi \, dP_n = \int_M \phi \, dP \qquad (4)$$

für alle stetigen beschränkten Abbildungen $\phi : M \to \mathbb{R}$. Bez.: $P_n \to P$.

Erinnerung Zentraler Grenzwertsatz: schwache Konvergenz der Verteilungen von standardisierten Partialsummen gegen die Standard-Normalverteilung. Erinnerung Portmanteau–Theorem:

Proposition 3. Äquivalent sind[6]

(i) $P_n \to P$,

(ii) (4) gilt für alle gleichmäßig stetigen beschränkten Abbildungen $\phi : M \to \mathbb{R}$.

(iii) $\forall\, A \subset M$ offen : $\quad \liminf_{n \to \infty} P_n(A) \geq P(A)$,

(iv) $\forall\, A \in \mathfrak{B}(M)$: $\quad P(\partial A) = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} P_n(A) = P(A)$.

Beweis. Siehe Gänssler, Stute (1977, p. 342–344). □

Bemerkung 2. Der schwache Grenzwert ist eindeutig bestimmt; gilt nämlich für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P_1, P_2, daß $\int f dP_1 = \int f dP_2$ für alle stetigen bechränkten f, und ist $A \subseteq M$ eine abgeschlossene Menge, so sei $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$. Dann sind die Funktionen $f_n(x) := 1 - ((n \cdot d(x, A)) \wedge 1)$ stetig und durch 1 beschränkt und konvergieren punktweise gegen $\mathbb{1}_A$, sodaß $\int \mathbb{1}_A f dP_1 = \int \mathbb{1}_A dP_2$ folgt, mit anderen Worten $P_1(A) = P_2(A)$.

[6] Notation: ∂A Rand von A.

Es gibt, analog zu der Konvergenz reeller Zahlen, auch das Teil–Teilfolgen–Kriterium, vgl. *Pr.Th. 06/07*, Remark II.3.4:

Lemma 2.
$$P_n \to P \;\Leftrightarrow\; \forall\,(n_k)\;\exists\,(n_k)_l \;:\; P_{n_{k_l}} \to P\,.$$

Fortan sei (M, ρ) vollständig und separabel.

Definition 4. $\Pi \subset \mathfrak{M}(M)$ heißt *straff*, falls

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, K \subset M \text{ kompakt } \;\forall\, P \in \Pi : P(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Klar: einelementige Teilmengen sind straff.

Satz 3 (Prohorov). Für $\Pi \subset \mathfrak{M}(M)$

$$\Pi \text{ relativ kompakt} \quad\Leftrightarrow\quad \Pi \text{ straff.}$$

Beweis. Siehe Parthasarathy (1967, p. 48–49). □

2.3 Das Donskersche Invarianzprinzip

Funktionale Version des Zentralen Grenzwertsatzes; verallgemeinert den klassischen ZGS (i.i.d.–Fall).
Gegeben $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ reellwertig, iid. auf Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$E(\xi_j) = 0, \qquad E(\xi_j^2) = \sigma^2 \in \,]0, \infty[\,.$$

Definiere $X : \Omega \to C(I)$ durch[7]

$$X(\omega)(k) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j(\omega), \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$\begin{aligned} X(\omega)(t) &= (t-k)\cdot X(\omega)(k+1) + (k+1-t)\cdot X(\omega)(k) \\ &= X(\omega)(k) + (t-k)\cdot \xi_{k+1}, \qquad\qquad t \in [k, k+1]. \end{aligned}$$

Skaliere wie folgt

$$X^{(n)}(\omega)(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot X(\omega)(n\cdot t), \qquad t \in I,\; n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 2 sichert die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}(C(I))$-Meßbarkeit von X und $X^{(n)}$, und diese Abbildungen definieren Prozesse mit stetigen Pfaden[8].

[7] Stückweise lineare Interpolation der zugehörigen Irrfahrt.
[8] Schreibe $X_t(\omega) = X(\omega)(t)$. Analog für $X^{(n)}$

Für $s = k/n$ und $t = \ell/n$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ und $k < \ell$ gilt

$$X_t^{(n)} - X_s^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot (\xi_{k+1} + \cdots + \xi_\ell).$$

Also
$$E(X_t^{(n)} - X_s^{(n)}) = 0, \qquad E(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^2 = t - s,$$
und $X_t^{(n)} - X_s^{(n)}$ ist unabhängig von

$$\mathfrak{F}_s^{X^{(n)}} = \sigma(\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}).$$

Beachte
$$X_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \xi_k.$$

Der Zentrale Grenzwertsatz zeigt

$$X_1^{(n)} P \to N(0,1).$$

Satz 4 (Donsker, 1951). Sei $P_n = X^{(n)}P$ die Verteilung von $X^{(n)}$, und sei P_* das Wiener-Maß. Dann
$$P_n \to P_*.$$

Beweisidee, Details in Karatzas/Shreve, pp.62–71.. Man hat zu zeigen:
1. P_n straff (Kompaktheit mit Arzela-Ascoli);
2. Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen.
Dann folgt aus Lemma 2, daß P_n schon gegen das Wienermaß konvergiert, denn jede Teilfolge enthält eine konvergente Teil–Teilfolge wegen 1.; wegen 2. muß aber der Grenzwert derselben das Wienermaß sein. □

Beachte: Dieser Satz beinhaltet eine sehr natürliche Konstruktion der Brownschen Bewegung (und des Wiener-Maßes).
Satz 4 ermöglicht die näherungsweise Berechnung von Funktionalen der Brownschen Bewegung z. Bsp. mittels Monte-Carlo-Methoden (Simulation von Irrfahrten).

3 Markov-Eigenschaft der Brownschen Bewegung

Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ sowie $d \in \mathbb{N}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$.

3.1 Mehrdimensionale Brownsche Bewegung

Definition 5. $W = (W_t)_{t\in I}$ *d-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl. $\mathfrak{F}$ mit Startverteilung μ*, falls

(i) W $\mathbb{R}^d$-wertig mit stetigen Pfaden,

(ii) W adaptiert an $\mathfrak{F}$,

(iii) $W_0 P = \mu$,

(iv) für $0 \leq s < t$ ist $W_t - W_s$

(a) unabhängig von $\mathfrak{F}_s$,

(b) $N(0, (t-s)\,\mathrm{Id}_d)$-verteilt.

Speziell falls $\mu(\{x\}) = 1$: *d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt $x \in \mathbb{R}^d$*.

Für jede d-dimensionale Brownsche Bewegung $W = \big((W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(d)})\big)_{t\in I}$ mit Startpunkt $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})$ gilt: $W^{(1)}, \ldots, W^{(d)}$ sind unabhängige Brownsche Bewegungen der Dimension eins mit Startpunkten $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}$. Sind umgekehrt $W^{(1)}, \ldots, W^{(d)}$ unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen, so ist $W = (W^{(1)}+x^{(1)}, \ldots W^{(d)}+x^{(d)})$ eine d–dimensionale BB mit Startpunkt x. Ist allgemeiner ξ gemäß μ verteilt und unabhängig von W, so ist $W_t^{d,\mu} := W_t^{(d)} + \xi$ eine d–dimensionale BB mit Startverteilung μ.

Kanonische Darstellung[9] **:** $\Omega = (C(I))^d$, $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B}(C(I)))^d$,

$$W_t((f_1, \ldots, f_d)) = (f_1(t), \ldots, f_d(t))$$

mit kanonischer Filtration, P^0 d-faches Produkt des Wiener-Maßes. P^x sei die Verteilung von $W + x$

Lemma 3. Für $F \in \mathfrak{B}(C(I)^d)$ ist die Abbildung

$$x \mapsto P^x(F)$$

borelmeßbar.

Beweis. Sei $\mathfrak{G}$ das System der Mengen, welche die Behauptung erfüllen. Sei zunächst F von der Form $F = \bigcap_{i\leq n} \delta_{t_i}^{-1}(A_i)$ für $A_i \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, dann

$$P^x(A) = \mathbb{P}\Big((W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) \in (A_1 - x) \times \cdots \times (A_n - x)\Big) .$$

Diese Abbildung ist sogar stetig in x. Also enthält $\mathfrak{G}$ die Menge der meßbaren Rechtecke aus abgeschlossenen Mengen. Weiter ist $\mathfrak{G}$ ein Dynkin–System, denn mit $(A_n)_n$ disjunkt ist $P^x(\bigcup_n A_n) = \sum_n P^x(A_n)$. Da die meßbaren Rechtecke ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}(C(I)^d)$ sind, folgt $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}(C(I)^d)$. ☐

Für W.maß μ auf $\mathbb{R}$ definiere Wahrscheinlichkeitsmaß $P = P^\mu$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ durch[10]

$$P^\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{P^x(A)}_{=P^0(A-x)} \, d\mu(x), \qquad A \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

[9] Es gilt $(\mathfrak{B}(C(I)))^d = \mathfrak{B}(C(I)^d)$, siehe Lemma 1

[10] Vgl. Faltung.

Bemerkung 3. Im Sinne der schwachen Konvergenz kann eine d-dimensionale Brownsche Bewegung durch eine d-dimensionale Irrfahrt approximiert werden (mehrdimensionales Donsker Theorem).

Definition 6. Sei M metrischer Raum und $\mu \in \mathfrak{M}(M)$. Bezeichne mit $\overline{\mathfrak{B}(M)}^\mu$ die μ-Vervollständigung von $\mathfrak{B}(M)$. Dann heißt

$$\mathfrak{U}(M) = \bigcap_{\mu\in\mathfrak{M}(M)} \overline{\mathfrak{B}(M)}^\mu$$

die σ-Algebra der *universell meßbaren Mengen*. Kurz: universelle Meßbarkeit für $\mathfrak{U}(M)$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$-Meßbarkeit.

Definition 7. *d-dimensionale Brownsche Familie* ist eine Familie $(W_t)_{t\in I}$ von Abbildungen $W_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Familie $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so daß gilt

(i) für alle $A \in \mathfrak{A}$: $x \mapsto P^x(A)$ universell meßbar,

(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^d$: $(W_t)_{t\in I}$ ist Brownsche Bewegung mit Startwert x auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P^x)$.

Konstruktion: siehe oben; hier wird sogar die Borel-Meßbarkeit in (i) erreicht. (Die schwächere Forderung der universellen Meßbarkeit ist nützlich, wenn man auf anderem Wege zu einer Brownschen Familie kommt.)
Eine Brownsche Familie liefert Brownsche Bewegungen mit beliebigen Startverteilungen gemäß (5).

3.2 Markov-Prozesse

Motivation: „Gedächtnislosigkeit“ von Irrfahrten.

Definition 8. $\mathbb{R}^d$-wertiger adaptierter Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ heißt *Markov-Prozeß mit Startverteilung* μ, falls

(i) $X_0 P = \mu$,

(ii) für $s, t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P(\{X_{s+t} \in \Gamma\} \mid \mathfrak{F}_s) = P(\{X_{s+t} \in \Gamma\} \mid X_s).$$

Speziell falls $\mu(\{x\}) = 1$: *Markov-Prozeß mit Startpunkt $x \in \mathbb{R}^d$*.

Analog für Teilmengen von $[0, \infty[$ als Indexmengen, insbesondere für die diskrete Indexmenge $\mathbb{N}_0$.

Proposition 4. Sei X Markov-Prozeß. Setze $\mathfrak{B}_s = \sigma(\{X_u : u \geq s\})$. Dann

(i) für $s \in I$ und $A \in \mathfrak{B}_s$
$$P(A \mid \mathfrak{F}_s) = P(A \mid X_s),$$

(ii) für $s \in I$ und Y $\mathfrak{B}_s$-meßbar mit $E(|Y|) < \infty$

$$E(Y \mid \mathfrak{F}_s) = E(Y \mid X_s).$$

Beweis. ad (i): siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 76, 77).
ad (ii): algebraische Induktion unter Verwendung von (i). □

Definition 9. *d-dimensionale Markov-Familie* ist eine Familie $(X_t)_{t \in I}$ von Abbildungen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Familie $(P^x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so daß gilt

(i) für alle $A \in \mathfrak{A}$: $x \mapsto P^x(A)$ universell meßbar,

(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^d$: $(X_t)_{t \in I}$ ist Markov-Prozeß mit Startwert x auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P^x)$,

(iii) für $x \in \mathbb{R}^d$, $s, t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$P^x(\{X_{s+t} \in \Gamma\} \mid X_s = y) = P^y(\{X_t \in \Gamma\})$$

für $X_s P^x$ f.a. $y \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 5. Jede d-dimensionale Brownsche Bewegung ist ein Markov-Prozeß. Jede d-dimensionale Brownsche Familie ist eine Markov-Familie.

Beweis. Betrachte d-dimensionale Zufallsvektoren X, Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine σ-Algebra $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{A}$. Gelte: X und $\mathfrak{G}$ unabhängig, Y $\mathfrak{G}$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$-meßbar. Dann folgt für $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P(\{X + Y \in \Gamma\} \mid \mathfrak{G}) = P(\{X + Y \in \Gamma\} \mid Y) \tag{6}$$

und für YP-f.a. $y \in \mathbb{R}^d$

$$P(\{X + Y \in \Gamma\} \mid Y = y) = P(\{X + y \in \Gamma\}), \tag{7}$$

siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 121).
Anwendung: $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_s$, $X = W_{s+t} - W_s$, $Y = W_s$. Mit (6) folgt: W ist Markov-Prozeß. Ferner liefert (7)

$$P^x(\{W_{s+t} \in \Gamma\} \mid W_s = y) = P^x(\{W_{s+t} - W_s + y \in \Gamma\}).$$

Die Verteilung von $W_{s+t} - W_s + y$ bzgl. P^x ist $N(y, t\,\mathrm{Id}_d)$ und stimmt folglich mit der Verteilung von W_t bzgl. P^y überein. □

Bemerkung 4. Es gilt weder „Markov-Prozeß $\Rightarrow$ Martingal" noch „Martingal $\Rightarrow$ Markov-Prozeß". Gegenbeispiel zur ersten Implikation: Poisson-Prozeß; Beweis siehe oben. Gegenbeispiel zur zweiten Implikation: Übung 7.4.

3.3 Starke Markov-Eigenschaft und Spiegelungsprinzip

Betrachte eine eindimensionale Brownsche Bewegung W bzgl. $\mathfrak{F}$ und ihre *Niveauzeiten*

$$T_b(\omega) = \inf\{t \in I : W_t(\omega) = b\}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Diese sind Stoppzeiten, siehe Proposition I.4.(ii).
Fragen: Wie lautet die Verteilung von T_b? Gilt insbesondere $T_b < \infty$ P-f.s.? Im Falle einer positiven Antwort: ist $(W_{T_b+t} - W_{T_b})_{t \in I}$ eine Brownsche Bewegung und unabhängig von $\mathfrak{F}_{T_b}$?
Setze

$$\mathfrak{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{F}_{t+\varepsilon}$$

sowie

$$\mathfrak{F}_{T+} = \{A \in \mathfrak{A} : \forall\, t \in I : A \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_{t+}\}$$

für optionale Zeiten $T : \Omega \to I \cup \{\infty\}$.

Bemerkung 5.

(i) $(\mathfrak{F}_{t+})_{t \in I}$ ist rechtsseitig stetige Filtration mit $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$,

(ii) T optionale Zeit bzgl. $\mathfrak{F}$ $\Leftrightarrow$ T Stoppzeit bzgl. $\mathfrak{F}_+$

(iii) $\mathfrak{F}_{T+}$ ist σ-Algebra. Ferner $\mathfrak{F}_T \subset \mathfrak{F}_{T+}$ für Stoppzeiten T.

Definition 10. Optionale Zeit T heißt *P-endlich*, falls $P(\{T < \infty\}) = 1$.

Definition 11. $\mathbb{R}^d$-wertiger progressiv meßbarer Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ heißt *starker Markov-Prozeß mit Startverteilung μ*, falls

(i) $X_0 P = \mu$,

(ii) für $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ und jede P-endliche optionale Zeit S gilt

$$P(\{X_{S+t} \in \Gamma\} \mid \mathfrak{F}_{S+}) = P(\{X_{S+t} \in \Gamma\} \mid X_S).$$

Speziell falls $\mu(\{x\}) = 1$: *starker Markov-Prozeß mit Startpunkt $x \in \mathbb{R}^d$*.

Definition 12. *d-dimensionale starke Markov-Familie* ist eine Familie $(X_t)_{t \in I}$ von Abbildungen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Familie $(P^x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so daß gilt

(i) für alle $A \in \mathfrak{A}$: $x \mapsto P^x(A)$ universell meßbar,

(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^d$: $(X_t)_{t \in I}$ ist starker Markov-Prozeß mit Startwert x auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P^x)$,

(iii) für $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ und jede P^x-endliche optionale Zeit S gilt

$$P^x(\{X_{S+t} \in \Gamma\} \mid X_S = y) = P^y(\{X_t \in \Gamma\})$$

für $X_S P^x$ f.a. $y \in \mathbb{R}^d$.

Satz 5. Jede d-dimensionale Brownsche Bewegung ist ein starker Markov-Prozeß. Jede d-dimensionale Brownsche Familie ist eine starke Markov-Familie.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, Sections 2.6 B, C). □

Im folgenden sei W eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und S eine P-endliche optionale Zeit.

Satz 6. Durch

$$B_t = W_{S+t} - W_S, \qquad t \in I,$$

wird eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathfrak{F}_t^B)$ mit Startwert 0 definiert, die unabhängig von $\mathfrak{F}_{S+}$ ist.

Beweis. Das ist ein Spezialfall von Satz 7. □

Satz 7 (Spiegelungsprinzip). Sei S Stoppzeit und $d = 1$. Durch

$$B_t^S = \begin{cases} W_t & \text{falls } 0 \le t < S \\ 2W_S - W_t & \text{falls } t \ge S \end{cases}$$

wird eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathfrak{F}_t^B)$ mit Startwert 0 definiert.

Beweis. Im Falle, daß $S = r$ deterministisch ist, ist dies eine leichte Übung (man berechne die Kovarianz dieses zentrierten Gaußprozesses). In diesem Falle ist auch $\mathfrak{F}_t^B = \mathfrak{F}_t^W$. Sei im nächsten Schritt $S(\Omega) = \{s_1, s_2, \ldots\}$ höchstens abzählbar, und f eine stetige, beschränkte Funktion und $0 \le t_1 < \cdots < t_n$; wir haben nur nachzuweisen, daß[11]

$$\mathbb{E} f(B_{t_1}^S, \ldots, B_{t_n}^S) = \mathbb{E} f(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) \ . \tag{8}$$

Nun haben wir aber[12]

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} f(B_{t_1}^S, \ldots, B_{t_n}^S) &= \sum_k \mathbb{E}\, \mathbb{1}_{\{S=s_k\}} f(B_{t_1}^{s_k}, \ldots, B_{t_n}^{s_k}) \\
&= \sum_k \mathbb{E}\, \mathbb{1}_{\{S=s_k\}} \mathbb{E}[f(B_{t_1}^{s_k}, \ldots, B_{t_n}^{s_k}) \mid \mathfrak{F}_{s_k}^W] \\
&= \sum_k \mathbb{E}\, \mathbb{1}_{\{S=s_k\}} \mathbb{E}[f(B_{t_1}^{s_k}, \ldots, B_{t_n}^{s_k}) \mid \mathfrak{F}_{s_k}^B] \\
&= \sum_k \mathbb{E}\, \mathbb{1}_{\{S=s_k\}} \mathbb{E}[f(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) \mid \mathfrak{F}_{s_k}^B] \\
&= \sum_k \mathbb{E}\, \mathbb{1}_{\{S=s_k\}} f(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) \\
&= \mathbb{E} f(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) \ .
\end{aligned}$$

Ist S beliebig, so folgt (8) durch Approximation von S durch diskrete Stopzeiten. □

[11] Dies impliziert Gleichheit der endlichdimensionalen Verteilungen, siehe auch den Beweis von Satz 7

[12] f beschränkt, Lebesgue

Korollar 2. Sei W ein eindim. Wienerprozeß mit $W_0 = 0$, und $b > 0$. Für $T_b = \inf\{t \ge 0 \ : \ W_t \ge b\}$ ist

$$\mathbb{P}(T_b \ge t) = 2\mathbb{P}(W_t \ge b) = \mathbb{P}(|W_t| \ge b) \ .$$

Insbesondere ist für jedes feste t

$$\sup_{s \le t} W_t \overset{d}{=} |B_t| \ .$$

Beweis. Für $u > 0$

$$\begin{aligned}
P(\{T_b \le u\}) &= P(\{\max_{t \in [0,u]} W_t \ge b\}) \\
&= P(\{T_b \le u\} \cap \{W_u \le b\}) + P(\{T_b \le u\} \cap \{W_u > b\}) \\
&= P(\{T_b \le u\} \cap \{W_u \le b\}) + P(\{W_u > b\}).
\end{aligned}$$

Nun gilt $T_b(W) = T_b(B^{T_b})$ (mit der Notation aus Satz 7), und es gilt $T_b \le u \wedge W_u \le b$ genau dann, wenn $T_b \le u \wedge B_u^{T_b} \ge b$, also

$$P(\{T_b \le u\} \cap \{W_u \le b\}) = P(\{T_b \le u\} \cap \{B_u^{T_b} \ge b\}) = P(\{B_u^{T_b} \ge b\}) = P(\{W_u\} \ge b).$$

□

3.4 Brownsche Filtrationen

Die Filtration im kanonischen Modell der Brownschen Bewegung ist nicht rechtsseitig stetig. Ferner existieren in diesem Modell Mengen $A \in \mathfrak{B}(C(I))$ mit $P_*(A) = 0$ und $A \notin \mathfrak{F}_t$ für alle $t \in I$.

Für beliebige Filtrationen $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ setzen wir

$$\mathfrak{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \in I} \mathfrak{F}_t\right) .$$

Betrachte einen d-dimensionalen Prozeß X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit seiner kanonischen Filtration $\mathfrak{F}^X$. Setze

$$\mathfrak{N}^P = \{A \subset \Omega : \exists\, B \in \mathfrak{F}_\infty^X : A \subset B \wedge P(B) = 0\}.$$

Nach Einschränkung von P auf $\mathfrak{F}_\infty^X$ und anschließender Vervollständigung erhält man ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathfrak{F}_\infty^X \cup \mathfrak{N}^P)$, welches wieder mit P bezeichnet wird. Durch

$$\mathfrak{F}_t^P = \sigma(\mathfrak{F}_t^X \cup \mathfrak{N}^P), \qquad t \in I,$$

erhält man eine von X und P abhängige Filtration $\mathfrak{F}^P$, genannt die *augmentierte Filtration*.

Proposition 6. Ist X ein starker Markov–Prozeß mit Verteilung P auf dem Pfadraum, und $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^X$, so erfüllt $\mathfrak{F}^P$ die üblichen Voraussetzungen.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 90) zum Beweis der rechtsseitigen Stetigkeit. Klar: $\mathfrak{N}^P \subset \mathfrak{F}_0^P$. $\square$

Proposition 7. Für jede d-dimensionale Brownsche Bewegung W gilt: W ist auch bzgl. $\mathfrak{F}^P$ eine Brownsche Bewegung.

Beweis. Klar. $\square$

Somit insbesondere konstruiert: eine Brownsche Bewegung unter den üblichen Voraussetzungen über die Filtration.

Betrachte nun eine Brownsche Familie $(W_t)_{t\in I}$, $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$. Definiere P^μ gemäß (5) sowie

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_t = \bigcap_{\mu\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)} \mathfrak{F}_t^{P^\mu}, \qquad t \in I.$$

Klar: die Filtration $\widetilde{\mathfrak{F}}$ ist rechtsseitig stetig und es gilt

$$\mathfrak{F}_t^W \subset \widetilde{\mathfrak{F}}_t \subset \mathfrak{F}_t^{P^\mu}.$$

Satz 8. Jede d-dimensionale Brownsche Familie $(W_t)_{t\in I}$, $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ ist auch bzgl. der Filtration $(\widetilde{\mathfrak{F}}_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{F}}_\infty)$ eine d-dimensionale Brownsche Familie.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 93). Im Beweis läßt sich nur die universelle Meßbarkeit der Abbildungen $x \mapsto P^x(F)$ für alle $F \in \widetilde{\mathfrak{F}}_\infty$ zeigen. $\square$

Obige Filtration $\widetilde{\mathfrak{F}}$ heißt auch die *universelle Filtration* der Brownschen Familie.

4 Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung

Im folgenden sei $W = (W_t)_{t\in I}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0 auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ bzgl. der Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$. Wir haben bereits in den ersten Übungen einige Eigenschaften der Brownschen Bewegung gezseigt, die hier noch einmal gesammelt werden sollen.

Proposition 8. Sei $(W, \mathfrak{F})$ eine Brownsche Bewegung mit Startwert 0.

(i) $(-W_t)_{t\in I}$ ist Brownsche Bewegung bzgl. $\mathfrak{F}$ mit Startwert 0 (Symmetrie).

(ii) Für jedes $c > 0$ definiert

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot W_{c\cdot t}, \qquad t \in I,$$

eine Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathfrak{F}_{c\cdot t})_{t\in I}$ mit Startwert 0 (Skalierung).

(iii) Durch

$$X_t = \begin{cases} t \cdot W(1/t) & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

wird eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathfrak{F}^X$ mit Startwert 0 definiert (Projektive Spiegelung bei $t = \infty$).

(iv) Für jedes $T > 0$ wird durch

$$X_t = W_T - W_{T-t}, \qquad t \in [0, T],$$

eine Brownsche Bewegung auf $[0, T]$ bzgl. $(\mathfrak{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$ mit Startwert 0 definiert.

Proposition 9 (Starkes Gesetz der großen Zahlen).

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0 \qquad P\text{-f.s.}$$

Beweis. Dies wurde bereits in Übung 1.4 gezeigt, hier ein alternativer Beweis mit dem Spiegelungsprinzip: Für alle $t, \varepsilon > 0$ ist nach Korollar 2

$$\mathbb{P}(\sup_{t\le s\le 2t} W_s/s \ge \varepsilon) \le \mathbb{P}(1/t \sup_{s\le t} W_s \ge \varepsilon) = 2\mathbb{P}(W_t/t \ge \varepsilon) \ ;$$

mit $t \to \infty$ geht der rechte Term gegen 0, und hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Proposition 10 (Hölder-Stetigkeit und Nichtdifferenzierbarkeit). P-f.s. gilt: W in keinem Punkt Hölder-stetig mit Exponent $\gamma > 1/2$.

Beweis. Siehe Karatzas/Shreve, p.??, hier nur für den Punkt 0: Wir betrachten den Wienerprozeß $B_{1/t} := W_t/t$; dieser ist Hölderstetig in 0, falls $h^{-\gamma}B_h$ beschränkt bleibt für $h \to 0$. Aber mit $h = 1/n$ ergibt sich

$$n^\gamma B_n = W_n/n^{1-\gamma} = n^{1-\gamma-1/2} \cdot (W_n/\sqrt{n}) \ ;$$

würde dies nun beschränkt bleiben, so würde $W_n/\sqrt{n} \to 0$, was aber mit W.keit 1 nicht passiert (Kolmogorovs 0–1–Gesetz, CLT). $\square$