Skript zur Vorlesung ,,Stochastische Analysis"
Version vom 19.04.2007
J. Creutzig

Kapitel I

Stochastische Prozesse

Literatur:

Revuz/Yor, Karatzas, Shreve (1999, Chap. 1).

1 Grundlegende Definitionen

1.1 Motivation

Ein mechanisches Bewegungsmodell

Ein Teilchen mit vernachlässigbarer Masse kollidiert zufällig mit vielen anderen (massebehafteten) Teilchen; wie kann man seinen zufälligen Pfad (in Newtonscher Mechanik) statistisch beschreiben?

Erste Idee: Modellierung der Kollisionseffekte durch random walk: $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge von $\mathbb{R}^3$–wertigen Zufallsgrößen; $Z_{n+1} := Z_n + Y_n$ Ort des Teilchens nach n–ter Kollision.

Probleme:

- Wollen eigentlich *zeitliche* Darstellung, keine *ereignisbestimmte* (n ist nicht Zeit, sondern Anzahl der Kollisionen).
- Verteilung von Y_i wie bestimmen? Verteilung von Z_n?
- Schon für kurze Zeiten wird die Anzahl der Kollisionen enorm sein; Zählen von Kollisionen unpraktikabel.

Lösung durch Idealisierung/Vereinfachung:

- Statt $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^1$ (z.B. x–Koordinate)
- X_t : Ort des Teilchens zur Zeit $t \in [0,\infty[$; reellwertige Zufallsvariable.
- $X_{t+h} - X_t$: Summe von sehr vielen unabhängigen 'Z_n' $\longrightarrow$ $X_{t+h} - X_t$ asymptotisch normalverteilt, unabhängig von allen X_s für $s \leq t$, und die Verteilung sollte nicht von t abhängen (wohl aber von h).

- Symmetrieüberlegungen: $\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t) = 0$.
- Skalierungsüberlegungen: Wegen Unabhängigkeit von $(X_{t+2h} - X_{t+h})$ von X_{t+h}, X_t und Verteilungsgleichheit von $(X_{t+2h} - X_{t+h})$, $((X_{t+h} - X_t))$ sollte gelten:

$$\mathrm{Var}(X_{t+2h} - X_t) = \mathrm{Var}(X_{t+2h} - X_{t+h}) + \mathrm{Var}(X_{t+h} - X_t) = 2\,\mathrm{Var}(X_{t+h} - X_t)$$

$\longrightarrow \mathrm{Var}(X_{t+h} - X_t)$ sollte linear von h abhängen.

Definition 1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine *(eindimensionale) Brownsche Bewegung (auf Ω)* ist eine Familie $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ von reellwertigen Zufallsgrößen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $X_0 = 0$;
2. Für alle $t, h \geq 0$ ist $X_{t+h} - X_t$ $\mathcal{N}(0, h)$–verteilt und unabhängig von $\sigma(X_s : s \leq t)$[1];
3. Für jedes feste $\omega \in \Omega$ ist die Zuordnung $t \mapsto X_t(\omega)$ eine stetige Funktion.

Frage: Existiert eine BB? Eindeutigkeit?
Drei Lösungsansätze:

(a) Konstruktiv: Man erstellt eine Folge von konkret angebbaren 'zufälligen Funktionen', zeigt, daß diese in geeigneter Hinsicht konvergieren, und daß der Grenzwert der Definition genügt (Wiener/Karhunen–Loewe, Donsker)

(b) Analytisch: Man definiert ein elementares stochastisches Integral und erklärt X_t als stochastisches Integral von $\mathbb{1}_{[0,t]}$.

(c) Generisch: Konsistenz– und Stetigkeitssatz von Kolmogorov.

Ein Modell für sukzessive Ausfälle

In einem Produktivsystem fällt ein bestimmtes Werkteil sehr oft aus; es wird umgehend ersetzt, aber jeder solche Ausfall kostet Produktionszeit und Material. Der Hersteller braucht eine statistische Beschreibung, wie sich die sukzessiven Ausfälle 'zeitlich verteilen'.

Modellierungsansatz: Z_t sei die Anzahl der bis zur Zeit t ausgefallenen Teile. Dann sollte gelten: Der Zuwachs im Zeitfenster $[t, t+h]$, also $Z_{t+h} - Z_t$, ist näherungsweise poissonverteilt[2]; weiter sollte $Z_{t+h} - Z_t$ unabhängig von Z_s, $s \leq t$, sein[3]. Zusätzlich sollten in einem doppelt so großen Zeitfenster im Schnitt doppelt so viele Ausfälle zu erwarten sein; der Parameter der Poissonverteilung von $Z_{t+h} - Z_t$ sollte daher linear von h abhängen. Und schließlich sind solcherart beobachtbare 'Ausfallverläufe', als Funktionen betrachtet, stückweise konstant, rechtsseitig stetig und linksseitig konvergent.

Definition 2. Ein *Poissonprozeß* der Intensität $\lambda > 0$ ist eine Familie von Zufallsgrößen

$$Z_t : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad t \geq 0\,,$$

sodaß gilt:

(i) $Z_0 = 0$.

(ii) Für $t \geq 0, h > 0$ ist $Z_{t+h} - Z_t$ Poissonverteilt mit Parameter $h \cdot \lambda$ und unabhängig von $\sigma(Z_s : s \leq t)$.

(iii) Für jedes feste $\omega \in \Omega$ ist die Funktion

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

cadlag[4], d.h. an jeder Stelle rechtsseitig stetig und linksseitig konvergent.

Problem: Existenz? Eindeutigkeit?
Zwei Lösungsansätze:

(a) Direkte Konstruktion (s.z.B. Sato, p.15–17).

(b) Generisch mit Konsistenzsatz von Kolmogorov.

Aktienkurse

Ein sehr einfaches diskretes Modell für Aktienkurse ist wie folgt: Eine i.i.d. Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven Zufallsgrößen beschreibt die relativen Kursänderungen pro Zeiteinheit (Wochen, Tage, Stunden,..); der Aktienkurs wird dann modelliert als

$$A_{n+1} = A_n \cdot Y_{n+1}\,. \tag{1}$$

Man interessiert sich für das Verhalten dieses Modelles, wenn man die Zeiteinteilung immer weiter verfeinert. Dazu ist es zweckmäßig, das Modell umzuschreiben: Setzt man z.B. $R_n = Y_n - 1$, so kann man (1) umschreiben zu

$$\Delta A_n := (A_{n+1} - A_n) = A_n \cdot R_{n+1}\,,$$

und wenn wir mit S den von R induzierten random walk bezeichnen[5], erhalten wir

$$\Delta A_n = A_n \cdot \Delta S_n\,. \tag{2}$$

[1] $\sigma(X_s : s \leq t)$ ist die kleinste σ–Algebra $\mathfrak{A}'$, sodaß alle X_s $\mathfrak{A}'$–meßbar sind (s.Def.II.2.3, Rem.II.2.2, *Pr.Th. 06/07*); es folgt leicht aus Cor.III.5.1, daß ein Zufallsgröße genau dann von allen Vektoren der Form $(X_{s_1}, \ldots, X_{s_m})$ mit $s_i \leq t$ unabhängig ist, wenn sie von $\sigma(X_s : s \leq t)$ unabhängig ist.

[2] Es gibt viele 'Möglichkeiten' (z.B. Umläufe des Gesamtsystems), wie das Bauteil ausfallen kann, aber bei jedem einzelnen Umlauf ist die W.keit eines Ausfalles sehr klein $\Rightarrow$ Poissonscher Grenzwertsatz

[3] Das ist eine eventuell kritische Vereinfachung, weil Alterungseffekte nicht beachtet werden.

[4] Continu à droite, limites à gauche.

[5] also $S_0 = 0$, $S_{n+1} = S_n + R_{n+1}$

Nun kann man sich eine Folge von 'immer feineren' zufälligen Irrfahrten S^N vorstellen, zu denen man jeweils passend eine Aktienkurssimulation gemäß (2) erstellen kann. Es stellt sich sofort die Frage, ob man die Irrfahrten so wählen kann, daß die Kurssimulationen in einem geeigneten Sinne konvergieren, und ob man ein zeitstetiges 'Analogon' der Gleichung (2) der Art

$$dA_t = A_t \cdot dS_t \tag{3}$$

für die Grenzprozesse erklären und beweisen kann. Dies führt unmittelbar zur Idee stochastischer Differentialgleichungen.

1.2 Stochastische Prozesse, Pfadraum, Verteilung

Sei

- $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum,
- $(S, \mathfrak{S})$ meßbarer Raum,
- $I \neq \emptyset$.

Definition 3. Eine Familie $X = (X_t)_{t\in I}$ von Zufallsvariablen

$$X_t : \Omega \to S, \qquad t \in I,$$

heißt *stochastischer Prozeß* (mit *Zustandsraum* S (genauer $(S, \mathfrak{S})$) und Parametermenge I (auch 'auf I' oder 'über' I)).

Für uns relevantester Fall: $I \subseteq \mathbb{R}$, z.B. $I = [0, \infty[$ oder $I = [0, T]$, $S = \mathbb{R}^d$. Im folgenden sei stets Sei $X = (X_t)_{t\in I}$ ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum S.

Definition 4. Die Abbildung

$$U : \Omega \to S^I, \qquad \omega \mapsto (X_t(\omega))_{t\in I}$$

heißt *Pfadabbildung*; für jedes $\omega \in \Omega$ heißt $U(\omega) = (X_t(\omega))_{t\in I}$ ein *Pfad (Realisierung, Trajektorie)* von X.

Wir sagen kurz[6] , daß X stetige/meßbare/ beschränkte/integrierbare.. Pfade hat, wenn alle Pfade von X stetig/meßbar/beschränkt/integrierbar sind.

Bemerkung 1. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}^I$ die Produkt–σ–Algebra auf S^I, vergleiche Def.II.3.1 in *Pr.Th. 06/07*. Der meßbare Raum $(S^I, \mathfrak{S}^I)$ wird auch *Pfadraum* genannt. Aus Cor.II.3.1 in *Pr.Th. 06/07*folgt sofort, daß U $\mathfrak{A}$–$\mathfrak{S}^I$– meßbar ist; genauer gilt sogar, daß

$$\sigma(U) = U^{-1}(\mathfrak{S}^I) = \left\{U^{-1}(B)\ :\ B \in \mathfrak{S}^I\right\} = \sigma(X_s\ :\ s \in I)\ .$$

[6] Manchmal sagen wir auch ganz kurz, daß S stetig/beschränkt/.. *ist*.

Definition 5. Das Verteilungsgesetz $\mathbb{P}_U$ von U (also das Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter U) heißt die *Verteilung von X (auf/in dem Pfadraum)*. Für $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in I$ heißt $P_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}$ eine *endlichdimensionale Randverteilung*.

Bemerkung 2. (a) Sei $J \subseteq I$ endlich. Betrachten wir auf dem Pfadraum die kanonische Projektionsabbildung $\pi(I, J) : S^I \to S^J$, so ist das Bildmaß der Verteilung von X unter π gerade die Verteilung von $(X_t)_{t\in J}$ (also bei $J = \{t_1, \ldots t_n\}$ gleich[7] $\mathbb{P}_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})}$). Sind zwei Prozesse X, Y gegeben, deren endlichdimensionale Verteilungen sämtlich übereinstimmen, so folgt hieraus leicht, daß die Verteilungen von X und Y auf der Algebra der meßbaren Rechtecke (s.Def.II.3.1, *Pr.Th. 06/07*) übereinstimmen; daraus ergibt sich aber (s.Thm.II.4.4, *Pr.Th. 06/07*), daß die Verteilungen von X und Y identisch sind.

(b) Jeder stochastische Prozeß X mit Pfadraum S erzeugt durch die Pfadabbildung in kanonischer Weise ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$; ist umgekehrt μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$, so definiert die Koordinatenabbildung

$$X_t : S^I \to S, \qquad X_t(\omega) := \omega(t)$$

einen stochastischen Prozeß mit Zustandsraum S und Verteilung im Pfadraum μ. Man hat also eine Korrespondenz zwischen stochastischen Prozessen und Wahrscheinlichkeitsmaßen auf dem Pfadraum, völlig analog zur Korrespondenz zwischen Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsmaßen. Das ist insbesondere nützlich, wenn man die Existenz von stochastischen Prozessen mit gewissen Eigenschaften zeigen will.

(c) Mit Hilfe der Verteilung von X lassen sich alle Fragen

Allerdings werden nicht alle Eigenschaften eines Prozesses (z.B.Stetigkeit der Pfade) von der Verteilung bestimmt, s. dazu Bemerkung 3.

Definition 6. (i) Zwei stochastische Prozesse X und Y mit gleichem Zustandsraum S heißen *identisch verteilt* (oder *haben die gleichen endlichdimensionalen Verteilungen*), kurz $X \stackrel{d}{=} Y$, wenn ihre Verteilungen auf dem Pfadraum übereinstimmen.

(ii) Zwei stochastische Prozesse X, Y mit gleichem Zustandsraum, die auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ definiert sind, heißen *Versionen* voneinander

$$:\Leftrightarrow \bigwedge_{t\in I} \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1\ .$$

(iii) X,Y wie in (ii) heißen *ununterscheidbar*, falls $\mathbb{P}$–f.s. gilt:[8]

$$\bigwedge_{t\in I} X_t = Y_t\ .$$

[7] Ein kleiner Unterschied liegt darin, daß wir auf S^J keine Anordnung ausgezeichnet haben.

[8] Erinnerung: Das heißt, daß ein $\Omega_0 \in \mathfrak{A}$ existiert mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, und derart, daß für alle $\omega \in \Omega_0$ die Bedingung gilt. Die Menge der ω, sodaß $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für alle t, muß i.A. keineswegs meßbar sein!

Wir schreiben kurz, X *hat eine stetige/beschränkte/.. Version*, wenn eine Version Y von X existiert, sodaß Y stetige/beschränkte/.. Pfade hat.

Bemerkung 3. (a) Offenbar gilt 'ununterscheidbar $\Rightarrow$ Versionen $\Rightarrow$ identisch verteilt'; die Umkehrungen gelten aber nicht. Beispielsweise ist der Prozeß

$$X_t : ([0,1], \mathfrak{B}([0,1], \lambda) \to \mathbb{R} \, , X_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{t\}}(\omega)$$

eine Version des Nullprozesses $Y_t(\omega) = 0$, aber nicht ununterscheidbar hiervon; im Gegenteil gilt sogar

$$\Big\{\omega \ : \ \bigwedge_{t \in I} X_t(\omega) = 0\Big\} = \emptyset \, .$$

Man beachte auch, dass zwar X und der Nullprozeß die gleiche Verteilung haben, aber der eine nur unstetige Pfade, der andere nur stetige Pfade besitzt. Allerdings hat X eine *stetige Version*, d.h., es gibt eine Version mit stetigen Pfaden.

(b) Sind X, Y Versionen voneinander, und haben X, Y stetige Pfade, so sind X, Y ununterscheidbar (s. Übung).

1.3 Der Kolmogorovsche Konsistenzsatz

Sei

- $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum,
- $(S, \mathfrak{S})$ meßbarer Raum,
- $I \neq \emptyset$.

Wir setzen $\mathfrak{P}_0(I) := \big\{J \subseteq I \ : \ \#J < \infty\big\}$, und setzen

$$\pi(I,J) : S^I \to S^J, \qquad (f(t))_{t\in I} \mapsto (f(t))_{t \in J} \, .$$

Ein stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ mit Zustandsraum $(S, \mathfrak{S})$ erzeugt durch die Definition

$$\mu_J := \mathbb{P}_{(X_t)_{t\in J}} \, , \qquad J \in \mathfrak{P}_0(I) \, ,$$

stets eine Familie $(\mu_J)_{J \in \mathfrak{P}_0(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_J auf $(S^J, \mathfrak{S}^J)$; diese Familie ist *konsistent*[9] im folgenden Sinne: Für $J_1 \subseteq J_2$ gilt $\mu_{J_1} = \mu_{J_2} \circ \pi^{-1}(J_1, J_2)$.

Ziel dieses Anschnittes ist es, die Umkehrung für "schöne" Zustandsräume zu zeigen.

Satz 1. [Daniell 1918, Kolmogorov 1933] Sei S ein vollständiger separabler metrischer Raum mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(S)$; ferner sei $(\mu_J)_{J\in\mathfrak{P}_0(I)}$ eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann existiert ein (in Verteilung eindeutig bestimmter) stochastischer Prozeß X, sodaß $(\mu_J)_{J \in \mathfrak{P}_0(I)}$ die Familie der endlichdimensionalen Verteilungen von X ist.

[9] Diese Eigenschaft wird auch *projektiv* genannt.

Man sieht mit Hilfe von Bemerkung 1 sofort ein, daß dies gleichbedeutend ist mit dem folgenden Satz:

Satz 2. [Daniell 1918, Kolmogorov 1933] Sei S ein vollständiger separabler metrischer Raum mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(S)$; ferner sei $(\mu_J)_{J\in\mathfrak{P}_0(I)}$ eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$ mit $\mu_J = \mu \circ \pi^{-1}(I,J)$ für alle $J \in \mathfrak{P}_0(I)$.

(Man vergleiche dies Ergebnis mit den schon bekannten Ergebnissen für

(i) Produktmaße: $I, (S, \mathfrak{S})$ beliebig $\to$ Prozeß aus unabhängigen Variablen;

(ii) Markov–Kerne: $I = \mathbb{N}$, $(S, \mathfrak{S})$ beliebig (Ionesa–Tulcea);

siehe Kap.II.8 in *Pr.Th. 06/07*.)

Zur Vorbereitung des Beweises benötigen wir ein paar Hilfssätze:

Satz 3. (Äußere Regularität von Borelmaßen)
Es sei (M, d) ein metrischer Raum und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M, \mathfrak{B}(M))$. Dann gilt

$$\nu(A) = \inf\{\nu(O) \ : \ O \supseteq A, \ O \text{ offen}\} = \sup\{\nu(C) \ : \ C \subseteq A, \ A \text{ abgeschlossen}\} \, .$$

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ das System aller Mengen $A \in \mathfrak{B}(M)$, für die obiges gilt. Dann ist $\mathfrak{A}$ komplementstabil und $S \in \mathfrak{A}$. Weiter enthält $\mathfrak{A}$ alle abgeschlossenen Mengen: Ist A abgeschlossen, so gilt offenbar

$$\nu(A) \leq \inf\{\nu(O) \ : \ O \supseteq A, \ O \text{ offen}\} \, ;$$

umgekehrt gibt es eine Folge von offenen Mengen O_n, z.B. $O_n := \{x \ : \ d(x, A) < 1/n\}$, sodaß $O_n \searrow A$, und damit folgt

$$\nu(A) = \inf\{\nu(O) \ : \ O \supseteq A, \ O \text{ offen}\} \, .$$

Schließlich zeigen wir noch, daß $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist unter abzählbaren Vereinigungen; hieraus folgt sofort, daß $\mathfrak{A}$ eine σ–Algebra ist und somit gleich $\mathfrak{B}(M)$, und also die Behauptung. Seien also $A_i \in \mathfrak{A}$ und $\varepsilon > 0$, so finden sich offene $O_i \supseteq A_i$ und abgeschlossene $C_i \subseteq A_i$ mit

$$\nu(O_i \backslash C_i) = \nu(O_i \backslash A_i) + \nu(A_i \backslash C_i) \leq \varepsilon/2^i \, .$$

Wählt man nun i_0 so, daß

$$\nu\Big(\bigcup_i O_i \backslash \bigcup_{i \leq i_0} O_i'\Big) \leq \varepsilon/2 \, ,$$

so folgt $\bigcup_{i\leq i_0} C_i \subseteq \bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_i O_i$, und

$$\nu\Big(\bigcup_i O_i \backslash \bigcup_{i\leq i_0} C_i\Big) \leq \nu\Big((\bigcup_i O_i \backslash \bigcup_{i \leq i_0} O_i)\Big) + \sum_{i=1}^{i_0} \nu(O_i \backslash C_i) \leq \varepsilon \, .$$

Dies impliziert

$$\nu\Big(\bigcup_i O_i \backslash \bigcup_i A_i\Big) + \nu\Big(\bigcup_i A_i \backslash \bigcup_{i\leq i_0} C_i\Big) \leq \varepsilon \, ,$$

und somit ist $\bigcup_i A_i \in \mathfrak{A}$. $\square$

Satz 4. (Innere Regularität von Borelmaßen)
Es sei M ein vollständiger separabler metrischer Raum und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M, \mathfrak{B}(M))$. Dann gilt

$$\nu(A) = \sup\{\nu(C) \ : \ C \subseteq A, \ C \text{ kompakt}\} \ .$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß ν Radonsch ist, also

$$\sup\{\nu(C) \ : \ C \subseteq M, \ C \text{ kompakt}\} = 1 \ . \tag{4}$$

Sei $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dicht in M. Bilde

$$B_{n,i} := \{m \in M \ : \ d(m, m_i) < 1/n\} \ , i, n \in \mathbb{N} \ .$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $n \in \mathbb{N}$ fest. $(B_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ überdeckt M. Wähle $i_n = i_n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\nu\Big(M \backslash \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{n,i}\Big) \leq \varepsilon \cdot 2^{-n} \ .$$

Sei $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{n,i}$. Dann

$$\nu(M\backslash\bar{B}) \leq \nu(M\backslash N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(M \backslash \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{n,i}) \leq \varepsilon \ .$$

Um (4) zu folgern, müssen wir noch zeigen, daß $\bar{B}$ kompakt ist. Dazu zeigen wir, daß jede Folge in B eine Cauchy–Teilfolge enthält. Sei also $(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B$. Dann ex. $i_1^* \in \{1, \ldots, i_1\}$, sodaß $|\{i \in \mathbb{N} \ : \ z_i \in B_{1,i_1^*}\}| = \infty$. Man kann also eine Teilfolge aus z_i auswählen, die stets in B_{1,i_1^*} liegt. Durch Iteration und das klassische Diagonalisierungsargument bekommt man so eine Folge von Indices i_n^* und eine Teilfolge (y_n) von (z_i), welche für alle $m \leq n$ erfüllt: $y_n \in B_{m,i_m^*}$. Hieraus folgt wegen $\operatorname{diam}(B_{m,i}) \leq 1/m$ sofort, daß y_n eine Cauchyfolge ist. Weil M vollständig ist, existiert ein Grenzwert für y_n in $\bar{B}$. Also ist $\bar{B}$ kompakt, und (4) folgt. Nun sei $A \in \mathfrak{B}(M)$ beliebig; nach Satz 3 existiert für $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $C \subseteq A$ mit $\nu(A\backslash C) \leq \varepsilon$. Wegen (4) gibt es auch eine kompakte Menge $K \subseteq M$ mit $\nu(M\backslash K) \leq \varepsilon$. $D := C \cap K \subseteq A$ ist kompakt, und

$$\nu(A\backslash D) \leq 2\varepsilon \ .$$

□

Weiter benötigen wir zwei Lemmata über metrische Räume.

Lemma 1. Ist S ein vollständiger separabler metrischer Raum und J eine endliche Menge, so ist S^J, versehen mit der Produktmetrik, ein vollständiger separabler metrischer Raum, und $\mathfrak{B}(S)^J = \mathfrak{B}(S^J)$.

Beweis. (vgl. auch Thm.II.3.3 in *Pr.Th. 06/07.*) Die einzig nichttriviale Aussage ist die letzte. Weiter gilt (ganz ohne Voraussetzungen), daß $\mathfrak{B}(S)^J \subseteq \mathfrak{B}(S^J)$, denn Produkte offener Teilmengen von S sind ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}(S)^n$ (s.z.B. Thm.II.3.1(ii)

in *Pr.Th. 06/07*). Für die umgekehrte Inklusion sei o.E. $S^J = S^n$ und $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dicht in S; dann ist die Menge

$$\mathcal{B} := \Big\{B(m_i, q) \ : \ i \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}\Big\}$$

eine abzählbare Basis der Topologie von S[10]; ferner ist $\mathcal{B}^n$[11] eine abzählbare Basis der Topologie von S^n. Dies impliziert

$$\mathfrak{B}(S^n) = \sigma(\mathcal{B}^n) \ ; \tag{5}$$

da offenbar $\mathcal{B}^n$ aus meßbaren Rechtecken besteht, hat man weiter

$$\mathcal{B}^n \subseteq \mathfrak{B}(S)^n$$

und mit (5) folgt $\mathfrak{B}(S^n) \subseteq \mathfrak{B}(S)^n$. □

Lemma 2. Es sei $I \neq \emptyset$ und $J_n \in \mathfrak{P}_0(I)$. Weiter seien $K_n \subseteq S^{J_n}$ kompakt, und wir setzen

$$Y_n = \bigcap_{l=1}^{n} \pi^{-1}(I, J_l)(K_l) \ .$$

Falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, daß $Y_n \neq \emptyset$ ist, so ist $\bigcap_n Y_n \neq \emptyset$.

(Dies verallgemeinert den Cantorschen Durchschnittssatz im Falle $I = \{t\}$.)

Beweis. Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $y_n \in Y_n$. Für $t \in J_n$ und $m \geq n$ ist $y_m \in Y_n$, also folgt

$$y_m(t) = \pi(J_n, \{t\})[\pi(I, J_n) \underbrace{(y_m)}_{\in\pi^{-1}(I,J_n)(K_n))})] \in \underbrace{\pi(J_n, \{t\})(K_n)}_{\text{kompakt}} \ .$$

Setze $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Wir können nun wieder durch iterative Teilfolgenbildung und Diagonalisierung eine Teilfolge y_{n_l} bilden, sodaß für jedes $t \in J$ die Folge $y_{n_l}(t)$ konvergiert; wir definieren $\tilde{z} \in S^J$ durch

$$\tilde{z}(t) := \lim_{l\to\infty} y_{n_l}(t) \ , \qquad t \in J \ .$$

Nun wählen wir ein beliebiges $z \in S^I$ mit $\pi(I, J)(z) = \tilde{z}$; nun folgt leicht $(z_t)_{t\in J_n} \in K_n$ aufgrund der Abgeschlossenheit von K_n, und damit $z \in \bigcap_n Y_n$. □

Beweis von Satz 2. Die Eindeutigkeit folgt aus Bemerkung 1;
Existenz: Wir definieren zunächst einen passenden Inhalt auf einer $\mathfrak{S}^I$ erzeugenden Algebra, und zeigen, daß dieser Inhalt stetig in der leeren Menge ist. Dann läßt sich nach dem Satz von Caratheodory der Inhalt zu einem Maß auf $\mathfrak{S}^I$ fortsetzen.
Für $J \in \mathfrak{P}_0(I)$ sei $\mathfrak{A}_J$ das System von Mengen der Form $\pi^{-1}(I, J)(B)S$[12] mit $B \in \mathfrak{S}^J$. Auf $\mathfrak{A}_J$ definiert

$$\tilde{\mu}_J(\pi^{-1}(I, J)(B)) := \mu_J(B)$$

[10] D.h., daß jede offene Menge Vereinigung von Elementen von $\mathcal{B}$ ist)
[11] Hier ist das kartesische Produkt gemeint
[12] also genau die Mengen, die in den J–Koordinaten meßbar festgelegt sind

ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Wir betrachten nun die Algebra

$$\mathfrak{S}_0^I := \bigcup_{J \in \mathfrak{P}_0(I)} \mathfrak{A}_J \ .$$

Sicher ist $\mathfrak{S}_0^I \subseteq \mathfrak{S}^I$, und da die meßbaren Rechtecke in $\mathfrak{S}_0^I$ liegen, folgt $\mathfrak{S}^I = \sigma(\mathfrak{S}_0^I)$. Wegen der Konsistenz der Familie ist $\tilde{\mu}_{|\mathfrak{A}_J} := \tilde{\mu}_J$ wohldefiniert[13] und ein Inhalt auf $\mathfrak{S}_0^I$. Nun zeigen wir Stetigkeit in der leeren Menge: Seien $Z_n \in \mathfrak{S}_0^I$ mit $Z_n \searrow \emptyset$.

Annahme: $\inf_n \tilde{\mu}(Z_n) = \alpha > 0$.
Es sei $Z_n = \pi^{-1}(I, J_n)(B_n)$ mit $B_n \in \mathfrak{S}^{J_n}$. OBdA können wir $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots$ voraussetzen. Nach Lemma 1 und Satz 4 existieren kompakte Mengen C_n mit $\mu_{J_n}(B_n \backslash C_n) \leq 2^{-n}\alpha$. Setze $K_n = \pi^{-1}(I, J_n)(C_n)$, dann folgt

$$\tilde{\mu}(Z_n \backslash K_n) \leq 2^{-n}\alpha.$$

Da $K_n \subseteq Z_n$, folgt auch $Y_n := \bigcup_{i \leq n} K_i \subseteq Z_n$. Andererseits ist $Z_n \backslash Y_n \subseteq \bigcup_{i \leq n} Z_i \backslash K_i$, und daher folgt

$$\tilde{\mu}(Z_n) - \tilde{\mu}(Y_n) \leq \tilde{\mu}(\bigcup_{i=1}^{n} (Z_i \backslash K_i)) \leq \sum \tilde{\mu}(Z_i \backslash K_i) < \alpha.$$

Da $\hat{\mu}(Z_n) \geq \alpha$, folgt hieraus $\hat{\mu}(Y_n) > 0$, und damit $Y_n \neq \emptyset$ für jedes n. Aus Lemma 2 folgt nun $\bigcap_n Y_n \neq \emptyset$, ein Widerspruch.

Also ist $\tilde{\mu}$ stetig in der leeren Menge. Nach Thm.II.4.1 in *Pr.Th. 06/07*ist $\tilde{\mu}$ ein Prämaß; nach dem Satz von Caratheodory (Thm.II.4.3 in *Pr.Th. 06/07*) kann man $\tilde{\mu}$ also zu einem Maß μ auf $\sigma(\mathfrak{S}_0^I) = \mathfrak{S}^I$ fortsetzen. Nach Konstruktion ist offenbar $\mu \circ \pi^{-1}(I, J) = \mu_J$. □

Definition 7. In der Situation von Satz 2 nennen wir μ den *projektiven Limes* der Familie (μ_J), $\mu = \lim_J \mu_J$.

Bemerkung 4. Aus Übungsaufgaben 1,2 lassen sich mit obigem Satz sofort eine reiche Klasse von Prozessen konstruieren. Es sei hierzu $I \neq \emptyset$ und $C : I \times I \to \mathbb{R}$ symmetrisch und nichtnegativ definit[14] Nach Übung 1, Teil (d) existiert für jede endliche Teilmenge J (genau) eine Normalverteilung $\mu_J = \mathcal{N}(0, (C(t,s))_{t,s \in J})$; man sieht mit Teil (c) sofort, daß diese Familie konsistent ist. Folglich existiert ein zentrierter Gaußprozeß X auf I, sodaß Cov $(X_t, X_s) = C(t,s)$. Umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß für jeden reellwertigen Prozeß Y die Kovarianzfunktion $\tilde{C}(t,s) :=$ Cov (Y_t, Y_s) symmetrisch und nichtnegativ definit ist. (Offenbar teilen sich also viele Prozesse die gleiche Kovarianzfunktion.) Insbesondere existiert ein Gaußprozeß $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit Cov $(X_t, X_s) = \min\{s, t\}$. Das ist trotz Aufgabe 2, Teil (b), aber nicht unbedingt eine Brownsche Bewegung, da die Stetigkeit der Pfade nicht gegeben sein muß.

[13] Denn man rechnet mit der Konsistenz leicht nach, daß z.B.

$$\tilde{\mu}_{J \cup \{t\}} \pi^{-1}(I, J \cup \{t\})(B \times S) = \tilde{\mu}_J \pi^{-1}(I, J)(B) \ .$$

[14] D.h., daß jede Matrix $(C(t,s))_{t,s \in J}$, J endlich, nichtnegativ definit ist. Dies zu prüfen, ist oft allerdings nichttrivial.

Eine andere Anwendung ist die Existenz von Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen.

Definition 8. Sei $I = [0, \infty[$, $X = (X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$.

(i) X hat *unabhängige Zuwächse (Inkremente)*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$ die Folge $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabhängig ist.

(ii) X hat stationäre Zuwächse, falls für alle $0 \leq s < t$ gilt: $X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t-s} - X_0$.

Beispiel 1. Brownsche Bewegung und Poissonprozeß (so sie denn existieren) sind Beispiele für Prozesse mit stationären und unabhängigen Zuwächsen.

Sei X ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen; setze $\nu_{s,t} := P_{X_t - X_s}$, $0 \leq s \leq t$.

Bemerkung 5. (i) Offenbar gilt $\nu_{s,t} = \nu_{s,r} * \nu_{r,t}$, $0 \leq s < r < t$.

(ii) Falls $X_0 = 0$ f.s. , so ist die Verteilung von X schon durch $(\nu_{s,t})$ eindeutig bestimmt, denn für $0 = t_0 < \ldots < t_n$ ist

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = \Sigma_n(X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \ ,$$

wenn man

$$\Sigma_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \Sigma_n((x_i)_{i \leq n}) := ((\sum_{j \leq i} x_i))_{i \leq n}$$

setzt. Also

$$P_{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}} = (\nu_{t_1, t_0} * \cdots * \nu_{t_n, t_{n-1}}) \circ \Sigma_n^{-1} \ .$$

Satz 5. Sei $(\nu_{t,s})_{0 \leq s < t}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$. Es gelte

$$\forall 0 \leq s < u < t \qquad \nu_{s,t} = \nu_{s,u} * \nu_{u,t} \ . \tag{6}$$

Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und ein darauf definierter stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t \in [0, \infty[}$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$, sodaß

(i) $X_0 = 0$.

(ii) X hat unabhängige Zuwächse.

(iii) $\forall 0 \leq s < t \ : \ P_{X_t - X_s} = \nu_{s,t}$.

X ist durch diese Forderungen in seiner Verteilung eindeutig bestimmt.

Beweis. Mit Σ_n wie oben setzen wir für $J = \{t_1, \ldots, t_n\}$, $t_i < t_{i+1}$,

$$\mu_J := \nu_{t_1, 0} * \cdots * \nu_{t_n, t_{n-1}}) \circ \Sigma_n^{-1} \ .$$

Mit leichter Mühe zeigt man, daß dies eine projektive Familie ist; nun verbleibt, Satz 1 anzuwenden. □

Ein Spezialfall sind Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen mit $X_0 = 0$, bei denen $P_{X_t - X_s} = P_{X_{t-s}}$ gilt. Hier wird X in seiner Verteilung schon durch $\nu_t := \nu_{t,0}$ bestimmt; die Familie (ν_t) heißt *Faltungshalbgruppe* $(\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s})$.

Beispiel 2. (a) Sei $\lambda > 0$. Mit $\nu_t = \mathrm{Poi}(\lambda t)$ hat man $\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s}$ (s.z.B. Ex.IV.3.3 in *Pr.Th. 06/07*); nach Satz 5 existiert somit ein Prozeß $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ mit unabhängigen Zuwächsen und $Y_{t+h} - Y_t \stackrel{d}{=} \mathrm{Poi}(\lambda h)$. Dieser Prozeß hat offenbar monoton wachsende Pfade; wir konstruieren nun eine Version dieses Prozesses mit cadlag–Pfaden. Für jedes feste $t > 0, \omega \in \Omega$ sei nun $Z_0(\omega) = 0$ und

$$Z_t(\omega) := \lim_{s \nearrow t} Y_t(\omega) \ ;$$

dann ist $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ ein Prozeß mit rechtsstetigen Pfaden; man rechnet leicht nach (s.Übung), daß Z eine Version von Y ist, und damit ein Poissonprozeß.

(b) Aus dem Poissonprozeß lassen sich leicht allgemeinere Sprung-/Zählprozesse konstruieren, die 'compound Poisson processes' ('verbundenen/gemischten' Poissonprozesse). Der einzige Unterschied zum Poissonprozeß ist der, daßdie Sprunghöhen nicht mehr deterministisch 1 sind, sondern zufällig (und unabhängig von den Sprungzeiten) ausgewürfelt werden.

(c) Die Γ–Verteilung,

$$\Gamma_{c,\alpha}(B) := \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)} \cdot \int_{B\cap]0,\infty[} x^{c-1} e^{-\alpha x}\, dx, \qquad c, \alpha > 0$$

hat die Faltungseigenschaft $\Gamma_{c_1,\alpha} * \Gamma_{c_2,\alpha} = \Gamma_{c_1+c_2,\alpha}$. Daher ist für feste $\alpha, \lambda > 0$ die Familie

$$\nu_t := \Gamma_{\lambda t,\alpha}$$

eine Faltungshalbgruppe, und es existiert folglich ein stochastischer Prozeß X mit $X_0 = 0$ und unabhängigen, stationären Zuwächsen $X_{t+h} - X_t \sim \Gamma_{\lambda h,\alpha}$. Auch hier läßt sich zeigen, daß X eine Version mit cadlag–Pfaden besitzt; das ist aber etwas aufwändiger.

Wir würden nun gerne mehr über den Poissonprozeß lernen; zum Beispiel interessiert uns die Folge der Sprungzeiten

$$S_n := \inf\big\{t > 0 \ : \ Z_t \geq n\big\}$$

und der Wartezeiten

$$\xi_n := S_n - S_{n-1} \qquad (S_0 := 0) \ .$$

Da offenbar $\xi_1 > t \Leftrightarrow Z_t = 0$, hat man

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_1 > t \mid \xi_1 > s) &= \mathbb{P}(Z_t = 0 \mid Z_s = 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_t - Z_s = 0 \mid Z_s = 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_t - Z_s = 0) \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 > t - s) \ ; \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich leicht, daß ξ_1 exponentialverteilt ist mit Parameter λ. Die Unabhängigkeit der Zuwächse von der Vergangenheit suggeriert nun, daß die ganze Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge sein sollte; genauer würde man anhand der Modellierungsidee erwarten, daß der Prozeß $(Z_{t+S_1} - Z_{S_1})_{t\geq 0}$ wieder ein Poissonprozeß der Intensität λ und unabhängig von S_1 ist; ξ_2 ist dann die erste Sprungzeit dieses neuen Prozesses, wäre also i.i.d. zu ξ_1. Die Fragen, die sich hier aufdrängen, sind:

(i) Darf man überhaupt Z_{S_1} etc., als Zufallsgröße auffassen? Meßbarkeit?

(ii) Sicher gilt nicht für alle 'zufälligen Zeiten' $S = S(\omega)$, daß $(Z_{t+S} - Z_S)_{t\geq 0}$ wieder ein von S unabhängiger Poissonprozeß ist; für welche Art von 'vernünftigen' 'zufälligen Zeiten' kann man so etwas sagen?

(iii) Allgemeiner würden wir gerne sagen, daß ein Prozeß wie der Poissonprozeß oder die Brownsche Bewegung, 'ab' einer 'zufälligen Zeit' betrachtet, in seiner zukünftigen Entwicklung nicht von der 'Vorgeschichte' abhängt; was sind die richtigen Begriffe und Konzepte, um dies exakt und nutzbringend zu formulieren?

Diese Fragen führen auf natürliche Weise zu den Konzepten einer Filtration ('Vorgeschichte'), einer Stopzeit ('vernünftige zufällige Zeit') und der Markoveigenschaft ('Unabhängigkeit von der Vorgeschichte').

1.4 Filtrationen

Seien nun

- $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum,
- $I \subseteq \mathbb{R}$ (z.B. $I = [0,T]$, $I = [0,\infty[$),
- $(S, \mathfrak{S})$ Meßraum,
- X, Y S–wertige Prozesse auf I, definiert auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Definition 9.

(i) Eine *Filtration* (auf I über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$) ist eine Familie $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ von σ-Algebren $\mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{A}$ mit

$$\forall\ s,t \in I: \quad s < t \ \Rightarrow\ \mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t.$$

(ii) X heißt $\mathfrak{F}$–*adaptiert*, falls für alle $t \in I$ gilt: X_t $\mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{S}$-meßbar.

(iii) Die *kanonische Filtration* zu X ist

$$\mathfrak{F}_t^X = \sigma\left(\{X_s : s \leq t\}\right), \qquad t \in I.$$

Bemerkung 6. Offenbar ist $\mathfrak{F}^X$ die kleinste Filtration, zu der X adaptiert ist.

Bemerkung 7. Es Sei $I = [0, \infty[$ oder $I = [0, T]$. Für $t \in I$ sei

$$U_t : \Omega \to S^{[0,t]}, \qquad U_t(\omega)) := (X_s(\omega))_{s \leq t}$$

die eingeschränkte Pfadabbildung. Dann sieht man leicht, daß $\sigma(\{U_t\}) = \mathfrak{F}_t^X$. Für $V : \Omega \to \mathbb{R}$ zeigt dann das Faktorisierungslemma (Thm.II.2.8 in *Pr.Th. 06/07*), daß eine Abbildung $V : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{F}_t^X$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar ist, wenn $V = g((X_s)_{s \leq t})$ mit einem $\mathfrak{S}^{[0,t]}$–$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$–meßbaren g. Intuitiv formuliert:

> **$\mathfrak{F}_t^X$–meßbare Abbildungen sind genau die, welche nur die Information über X bis zur Zeit t benutzen.**

Dies rechtfertigt die Ansicht, Filtrationen 'codieren' die zur Zeit t 'verfügbaren' Informationen. Wieder intuitiv:

> **Eine Abbildung nutzt das durch $\mathfrak{F}$ codierte Wissen über Geschehnisse höchstens bis zur Zeit t genau dann, wenn sie $\mathfrak{F}_t$–meßbar ist.**

Im folgenden sei $I = [0, \infty[$. Gegeben: Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ in $\mathfrak{A}$.
Allgemein ist für einen stochastischen Prozeß X nicht klar, ob z.B. das 'Ereignis' $A_t = \{X_s \leq 1 \, \forall s \in [0, t]\}$ meßbar ist; die folgende Definition ist eine Art Minimalforderung, die solche Eigenschaften garantiert.

Definition 10.

(i) X heißt *meßbar*, falls

$$I \times \Omega \to S, \quad (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

$(\mathfrak{B}(I) \otimes \mathfrak{A})$-$\mathfrak{S}$-meßbar ist.

(ii) X *progressiv meßbar* (bzgl. $\mathfrak{F}$), falls für jedes $t \geq 0$ die Abbildung

$$[0, t] \times \Omega \to S, \quad (s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$$

$(\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t)$-$\mathfrak{S}$-meßbar ist.

Bemerkung 8. (a) Ist X meßbar, so ist nach Fubini auch für jedes feste ω die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ meßbar; X hat also meßbare Pfade. Die Umkehrung gilt i.A. aber nicht.

(b) Ist X progressiv meßbar, so ist auch für jedes feste t die Abbildung $X_t(\cdot) : \Omega \to S$ $\mathfrak{F}_t$–$\mathfrak{S}$–meßbar; folglich ist X $\mathfrak{F}$ adaptiert. Auch hier ist die Umkehrung falsch. Ferner ist für jedes $A \in \mathfrak{S}$

$$\{(t, \omega) \in I \times \Omega \; : \; X_t(\omega) \in A\} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \underbrace{\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \; : \; X_s(\omega) \in A\}}_{\in \mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t} \in \mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{A} \,,$$

und also ist X auch meßbar.

(c) Man kann mit ein wenig Aufwand zeigen: Ist X meßbar und adaptiert, so existiert eine progressiv meßbare Version von X (s. Karatzas/Shreve, p.5). Ist man also an der konkreten Version von X nicht interessiert, sind die Konzepte im wesentlichen austauschbar.

Proposition 1.

$$X \text{ adaptiert und rechtsseitig (linksseitig) stetig} \quad \Rightarrow \quad X \text{ progressiv meßbar.}$$

Beweis. Im Falle rechtsseitiger Stetigkeit. Fixiere $t > 0$, setze $I_0^{(n)} = \{0\}$ und $I_k^{(n)} =](k-1)/2^n \cdot t, k/2^n \cdot t]$ für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \ldots, 2^n$. Definiere

$$X_s^{(n)}(\omega) = X_{k/2^n \cdot t}(\omega), \quad \text{falls } s \in I_k^{(n)}.$$

Dann folgt für alle $\omega \in \Omega$ und $s \in [0, t]$

$$\lim_{n \to \infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega).$$

Ferner gilt für $B \in \mathfrak{S}$

$$\begin{aligned} \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s^{(n)}(\omega) \in B\} &= \bigcup_{k=0}^{2^n} \{(s, \omega) \in I_k^{(n)} \times \Omega : X_{k/2^n \cdot t}(\omega) \in B\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{2^n} \left(I_k^{(n)} \times \{X_{k/2^n \cdot t} \in B\} \right) \in \mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t. \end{aligned}$$

□

Im Folgenden werden wir manchmal eine gewisse 'Stetigkeit im Erkenntnisgewinn' brauchen:

Definition 11. $\mathfrak{F}$ heißt *rechtsseitig stetig*, falls

$$\forall \; t \in I : \quad \mathfrak{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{F}_{t+\varepsilon}.$$

Bemerkung 9. Offenbar ist für jede Filtration $\mathfrak{F}$ durch

$$\mathfrak{F}_t^* := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{F}_{t+\varepsilon}$$

eine rechtsstetige Filtration $\mathfrak{F}^*$ definiert, die $\mathfrak{F}$ *verfeinert*, also $F_t \subseteq F_t^*$ erfüllt.

Beispiel 3. Ist $\mathbb{P}(R = +1) = \mathbb{P}(R = -1) = 1/2$, und ist $X_t = R \cdot t$, so ist $\mathfrak{F}^X$ nicht rechtsstetig in 0: $X_0 = 0$, also $\mathfrak{F}_0^X = \{\emptyset, \Omega\}$; für $t > 0$ ist aber $\mathfrak{F}_t^X = \sigma(R) \neq \mathfrak{F}_0^X$. Das entspricht dem 'spontanen Erkenntnisgewinn' über R, sobald $t > 0$. Das Beispiel zeigt auch, daß stetige Prozesse keine rechtsstetigen kanonischen Filtrationen erzeugen müssen.

1.5 Stopzeiten

Oft wird bei Beobachtung eines zufälligen Prozesses auf das Eintreten eines vom Prozeßverlauf abhängigen Ereignisses gewartet. Zur Modellierung solcher Ereignisse werden Stopzeiten erklärt und untersucht.

Sei $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ Filtration über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Definition 12. Eine Abbildung $T : \Omega \to I \cup \{\infty\}$ heißt

(i) T *Stopzeit* (bzgl. $\mathfrak{F}$), falls

$$\forall\, t \in I : \quad \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

(ii) T *optionale Zeit* (bzgl. $\mathfrak{F}$), falls

$$\forall\, t \in I : \quad \{T < t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Bemerkung 10. (a) Für T beliebig definiere $X_t^T := \mathbb{1}_{\{T\leq t\}}$; dann ist T $\mathfrak{F}$ Stopzeit genau dann, wenn X^T $\mathfrak{F}$–adaptiert ist (s. Übung). Analog ist T optionale Zeit genau dann, wenn $X_t^T := \mathbb{1}_{\{T<t\}}$ $\mathfrak{F}$–adaptiert ist.

(b) Betrachte die kanonische Filtration $\mathfrak{F}^X$ bezüglich eines Prozesses. Genau dann ist T Stopzeit bzgl. $\mathfrak{F}^X$, wenn für jedes $t \in I$ eine Menge $B \in \mathfrak{S}^{[0,t]}$ mit

$$\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega : X.(\omega)|_{[0,t]} \in B\}$$

existiert, siehe Bemerkung 7. T is also $\mathfrak{F}^X$–Stopzeit genau dann, wenn das 'Auslösen' von T durch die zeitliche Entwicklung von X kontrolliert wird.

Proposition 2.

$$T \text{ Stopzeit} \quad \Rightarrow \quad T \text{ optionale Zeit.}$$

Es gilt „$\Leftrightarrow$“ im Falle einer rechtsseitig stetigen Filtration.

Beweis. „$\Rightarrow$'“:

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{T \leq t - 1/n\}}_{\in \mathfrak{F}_{t-1/n}} \in \mathfrak{F}_t.$$

„$\Leftarrow$'“: Für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \underbrace{\{T < t + 1/n\}}_{\in \mathfrak{F}_{t+1/n}} \in \mathfrak{F}_{t+1/m}.$$

Mit der Stetigkeitsannahme folgt $\{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$. □

Proposition 3. Mit $S, T, T_1, \dots$ sind auch $S + T$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ Stopzeiten bzgl. $\mathfrak{F}$. Im Falle einer rechtsseitig stetigen Filtration gilt dies auch für $\inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$.

Beweis. sup und inf erledigt man mit Bem.10 und Prop.2; zur Summe:

$$\begin{aligned}&\{S + T > t\}\\ &\quad = \underbrace{\{S = 0, T > t\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \cup \{0 < S < t, S + T > t\} \cup \underbrace{\{S = t, T > 0\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \cup \underbrace{\{S > t\}}_{\in \mathfrak{F}_t}\end{aligned}$$

sowie

$$\{0 < S < t, S + T > t\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap]0,t[} \underbrace{\{r < S < t, T > t - r\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \in \mathfrak{F}_t.$$

□

Definition 13. *Eintrittszeit* in $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$:[15]

$$H_\Gamma(\omega) = \inf\{t \in I : X_t(\omega) \in \Gamma\}.$$

H_Γ heißt Debút– oder Eintrittszeit von X in Γ.

Proposition 4. Sei X zu $\mathfrak{F}$ adaptiert. Dann

(i) X rechtsseitig stetig $\wedge$ Γ offen $\Rightarrow$ H_Γ optionale Zeit.

(ii) X stetig $\wedge$ Γ abgeschlossen $\Rightarrow$ H_Γ Stopzeit.

Beweis. ad (i): Es gilt

$$\{H_\Gamma < t\} = \bigcup_{s\in[0,t[} \{X_s \in \Gamma\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t[} \underbrace{\{X_s \in \Gamma\}}_{\in \mathfrak{F}_s} \in \mathfrak{F}_t.$$

ad (ii): Wir führen den ε–Saum einer Menge ein: Für $\varepsilon > 0$ sei

$$\Gamma_\varepsilon := \left\{x \in \mathbb{R}^d \;:\; \inf_{y\in\Gamma} |x - y| < \varepsilon\right\},$$

hierbei sei $|\cdot|$ der euklidische Abstand. Offenbar ist Γ_ε offen, und $\Gamma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{1/n}$ (Γ ist abgeschlossen). Ferner gilt wegen der Stetigkeit von X für alle $t > 0$ und alle $\omega \in \Omega$:

$$\begin{gathered}\text{Es existiert ein } s \leq t, \text{ sodaß } X_s(\omega) \in \Gamma\\ \Leftrightarrow \text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ existiert eine Zahl } s < t, \text{ sodaß } X_s(\omega) \in H_{1/n}.\end{gathered}$$

Also ist

$$\{H_\Gamma \leq t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{H_{\Gamma_{1/n}} < t\}}_{\in \mathfrak{F}_t \text{ nach (i)}} \in \mathfrak{F}_t\,.$$

□

Bemerkung 11. Der vorige Satz kann viel allgemeiner formuliert und bewiesen werden: Ist die Filtration $\mathfrak{F}$ rechtsstetig und vollständig (d.h. jede Teilmenge A einer Nullmenge $B \in \mathfrak{F}_t$ gehört auch zu $\mathfrak{F}_t$), und ist X progressiv meßbar, so ist für jedes $\Gamma \in \mathfrak{S}$ die Größe H_Γ eine Stopzeit, vergleiche hierzu [D-M 78], Kapitel IV, Theorem 50. Umgekehrt kann jede Stopzeit als Debútzeit geschrieben werden, siehe Übung.

[15] Wie üblich: $\inf \emptyset = \infty$.

Gegeben: Stopzeit T.

Definition 14. *σ-Algebra der T-Vergangenheit*:

$$\mathfrak{F}_T = \{A \in \mathfrak{A} : \forall\, t \in I : A \cap \{T \le t\} \in \mathfrak{F}_t\}.$$

Intuitiv gesprochen: Eigentlich möchte man in $\mathfrak{F}_T$ die Ereignisse sammeln, die 'zur Zeit T entscheidbar' sind. Um dies zu modellieren, sammelt man alle Ereignisse mit der Eigenschaft, daß sie zur Zeit t 'entscheidbar' ($\mathfrak{F}_t$–meßbar) sind, falls $T \le t$.

Bemerkung 12. Man rechnet leicht nach, daß $\mathfrak{F}_T$ eine σ-Algebra und T $\mathfrak{F}_T$-$\mathfrak{B}(I \cup \{\infty\})$-meßbar ist.

Betrachte den Prozeß X zur Stopzeit T[16],

$$X_T : \Omega \to S, \qquad X_T(\omega) := \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega), & T(\omega) < \infty\ , \\ 0, & T(\omega) = \infty\ , \end{cases}$$

und den gestoppten Prozeß[17]

$$(X_{T \wedge t})_{t \in I}\,.$$

Proposition 5. Sei X progressiv meßbar. Dann

(i) X_T ist $\mathfrak{F}_T$-$\mathfrak{S}$-meßbar.

(ii) $(X_{t \wedge T})_{t \in I}$ ist progressiv meßbar und bezüglich $\mathfrak{F}_{t \wedge T}$–adaptiert.

Beweis. ad (ii): Fixiere $t > 0$, setze $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}([0,t])$. Die Abbildung

$$[0,t] \times \Omega \to [0,t] \times \Omega, \quad (s,\omega) \mapsto (T(\omega) \wedge s, \omega)$$

ist $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}_t$-meßbar[18]. Die Abbildung

$$[0,t] \times \Omega \to S, \quad (z,\omega) \mapsto X_z(\omega)$$

ist n.V. $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{S}$-meßbar. Betrachte die Komposition.
ad (i): Es gilt

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \le t\} = \underbrace{\{X_{T \wedge t} \in B\}}_{\in \mathfrak{F}_t \text{ wg. (ii)}} \cap \underbrace{\{T \le t\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \in \mathfrak{F}_t$$

für $B \in \mathfrak{S}$. □

Eine enorm praktische Eigenschaft von Stopzeiten ist die monotone Approximierbarkeit durch diskrete Stopzeiten. Wir sagen, daß eine Stopzeit T *endlich* ist, wenn $\infty \notin T(\Omega)$; falls $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$, heißt T *fast sicher endlich.*

[16] Mitunter wird X_T im Falle $T = \infty$ auch anders oder gar nicht definiert. Wir werden nur mit f.s. endlichen Stopzeiten arbeiten, weswegen die genaue Definition in diesem Kurs eigentlich egal ist.

[17] Notation $\wedge$ für min.

[18] $\{T \wedge s \le u\} = [0,t] \times \{T \le u\} \cup [0,u] \times \Omega$.

Satz 6. Es sei T eine $\mathfrak{F}$–Stopzeit.

(i) Es existiert eine Folge von Stopzeiten $T_n : \Omega \to [0,\infty[$, sodass $T_n(\omega) \nearrow T(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, und $\#T_n(\Omega) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es existiert eine Folge von Stopzeiten T_n, sodaß $T_n(\Omega)$ höchstens abzählbar ist und $T_n \searrow T$ überall. Wenn T endlich ist, kann T_n endlich gewählt werden.

Beweis. (i) : Dies leistet

$$T_n := 2^n \wedge \left(2^{-n} \lfloor 2^n T \rfloor\right)\ .$$

(ii): Wähle

$$T_n := \begin{cases} \infty, & T = \infty, \\ \left(2^{-n} \lceil 2^n T \rceil\right), & T < \infty\ . \end{cases}$$

□

Lemma 3. Ein Zufallsvektor $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ist genau dann unabhängig von einer σ–Algebra $\mathfrak{F}$, wenn für alle stetigen, beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(f(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot \mathbb{1}_H\right) = \left(\mathbb{E} f(\xi_1, \dots, \xi_n)\right) \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_H\right), \qquad \forall H \in \mathfrak{F}\ .$$

Beweis. Die Notwendigkeit ist trivial, daß die Bedingung hinreicht, sieht man so: Es folgt sofort, daß für jede stetige beschränkte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt

$$\mathbb{E}\left(f(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot g(\mathbb{1}_H)\right) = \left(\mathbb{E} f(\xi_1, \dots, \xi_n)\right) \cdot \mathbb{E}\left(g(\mathbb{1}_H)\right), \qquad \forall H \in \mathfrak{F}\ .$$

Insbesondere gilt dies für $f(x_1, \dots, x_n) = e^{\iota \langle x, \lambda \rangle}$ und $g(x_{n+1}) = e^{\iota \lambda_{n+1} x_{n+1}}$; dies impliziert für die charakteristischen Funktionen, daß

$$\varphi_{(\xi_1, \dots, \xi_n, \mathbb{1}_H)} = \varphi_{(\xi_1, \dots, \xi_n)} \cdot \varphi_{\mathbb{1}_H}\ ,$$

also die gewünschte Unabhängigkeit. □

Satz 7. Ist X ein rechtsstetiger (linksstetiger) Prozeß mit unabhängigen und stationären Zuwächsen, und ist T eine $\mathfrak{F}^X$–adaptierte, endliche Stopzeit, so ist der Prozeß $(X_{t+T} - X_T)_{t \ge 0}$ verteilungsgleich zu X, $\mathfrak{F}^X_{t+T}$–adaptiert und unabhängig von $\mathfrak{F}_T$. Insbesondere ist er unabhängig von $(X_{t \wedge T})_{t \ge 0}$.

Beweis. Setze kurz $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^X$ und $Y_{s,t} := X_{s+t} - X_s$. Es ist offensichtlich, daß $Y_{t,T} = X_{t+T} - X_T$ $\mathfrak{F}_{t+T}$–meßbar ist (dies gilt ganz allgemein). Folglich genügt zu zeigen, daß für $s_1, \dots, s_m \ge 0$, $H \in \mathfrak{F}_T$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt gilt:

$$\mathbb{E}\left(f(Y_{s_1,T}, \dots Y_{s_m,T}) \cdot \mathbb{1}_H\right) = \mathbb{E} f(X_{s_1}, \dots X_{s_m}) \cdot \mathbb{E} \mathbb{1}_H\ . \tag{7}$$

Denn hieraus folgt mit $H = \Omega$, daß

$$\mathbb{E}\left(f(Y_{s_1,T}, \dots Y_{s_m,T})\right) = \mathbb{E} f(X_{s_1}, \dots Y_{s_m})\ ,$$

und dies impliziert (mit f als charakteristischer Funktion) Gleichheit der endlichdimensionalen Verteilungen von X und $Y_{\cdot,T}$. Andererseits folgt dann auch

$$\mathbb{E}\left(f(Y_{s_1,T}, \dots Y_{s_m,T}) \cdot \mathbb{1}_H\right) = \mathbb{E} f(Y_{s_1,T}, \dots Y_{s_m,T}) \cdot \mathbb{E} \mathbb{1}_H\ ,$$

und das impliziert nach Lemma 3 Unabhängigkeit.

Fall 0: T ist deterministisch, $T(\omega) = t$ überall. In diesem Falle ist $Y_{s,T} = Y_{s,t}$, und (7) ist trivial.

Fall 1: T nimmt abzählbar viele Werte an.
In diesem Falle gibt es $t_i \geq 0$ und disjunkte Mengen $A_i \in \mathfrak{F}^X_{t_i}$, sodaß

$$T = \sum_{i \geq 0} t_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \ .$$

Die linke Seite von (7) läßt sich dann mit Fall 0 ausrechnen[19]:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f(Y_{s_1,T}, \dots Y_{s_m,T}) \cdot \mathbb{1}_H\right) &= \sum_{i \geq 0} \mathbb{E}\left(f(Y_{s_1,t_i}, \dots Y_{s_m,t_i}) \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{T=t_i} \cdot \mathbb{1}_H}_{\mathfrak{F}_{t_i}-\text{meßbar}}\right) \\
&= \sum_{i \geq 0} \mathbb{E}\left(f(X_{s_1}, \dots X_{s_m})\right) \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T=t_i} \cdot \mathbb{1}_H\right) \\
&= \mathbb{E} f(X_{s_1}, \dots X_{s_m}) \cdot \mathbb{E}\mathbb{1}_H \ .
\end{aligned}$$

Fall 2: T beliebig, aber endlich. Wähle endliche $T_n \searrow T$ mit $T_n(\Omega)$ abzählbar. Aus der Rechtsstetigkeit von X und der Stetigkeit von f folgt, daß

$$f(Y_{s_1,T_n}, \dots Y_{s_m,T_n})) \cdot \mathbb{1}_H \to f(Y_{s_1,T}, \dots Y_{s_m,T})) \cdot \mathbb{1}_H \ ,$$

und da f beschränkt ist, impliziert Lebesgue die Konvergenz der Erwartungswerte; aus Fall 1 folgt dann (7). □

2 Martingale

Gegeben: Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ und adaptierter reellwertiger Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$\forall\, t \in I : \quad E(|X_t|) < \infty.$$

Kurzschreibweise: $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in I}$, falls X an $\mathfrak{F}$ adaptiert.

Definition 15. $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ *Submartingal*, falls

$$\forall\, s, t \in I : \quad s < t \ \Rightarrow \ X_s \leq E(X_t \mid \mathfrak{F}_s).$$

Supermartingal: „$\geq$“, *Martingal* „$=$“.

Beispiel 4. Für einen Poisson-Prozeß $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ mit Intensität $\lambda > 0$ und $0 \leq s < t$ gilt

$$E(X_t \mid \mathfrak{F}_s) = E(X_t - X_s \mid \mathfrak{F}_s) + E(X_s \mid \mathfrak{F}_s) = E(X_t - X_s) + X_s = \lambda(t-s) + X_s.$$

Also liegt ein Submartingal vor.
Definiere einen *kompensierten Poisson-Prozeß* durch

$$M_t = X_t - \lambda t.$$

Dann ist $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ ein Martingal.

[19] Beachte, daß f beschränkt ist, daher ist Lebesgue anwendbar, um Summation und Erwartungswert zu vertauschen

Die Martingaltheorie im kontinuierlichen Fall $I = [0, \infty[$ wird oft unter Rückgriff auf den vorab betrachteten diskreten Fall entwickelt. Wir diskutieren einige Elemente dieser Theorie.

2.1 Martingale in diskreter Zeit

Zunächst sei $I = \mathbb{N}_0$.

Beispiel 5. *Cox-Ross-Rubinstein Modell:* einfaches Modell für Aktienkurs zu Zeiten $t \in \mathbb{N}_0$. Wähle

$$A_0 > 0, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < d < u,$$

und betrachte $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ iid. mit

$$P(\{Y_t = u\}) = p = 1 - P(\{Y_t = d\}).$$

Definiere $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und

$$A_t = A_0 \cdot \prod_{s=1}^{t} Y_s, \qquad \mathfrak{F}_t = \sigma(\{Y_1, \dots, Y_t\})$$

für $t \in \mathbb{N}$. Klar: $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^A$. Für ganzzahlige $0 \leq s < t$

$$E(A_t \mid \mathfrak{F}_s) = A_s \cdot E\left(\prod_{k=s+1}^{t} Y_k\right) = A_s \cdot E(Y_1)^{t-s} = (pu + (1-p)d)^{t-s} \cdot A_s.$$

Also

$$(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0} \text{ Submartingal} \quad \Leftrightarrow \quad E(Y_1) \geq 1$$

und

$$(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0} \text{ Martingal} \quad \Leftrightarrow \quad d < 1 < u \ \wedge \ p = \frac{1-d}{u-d}.$$

Wir sehen später: ein geeigneter Grenzübergang liefert die geometrische Brownsche Bewegung; auf diesem stochastischen Modell basiert die Black-Scholes-Formel.

Frage: Gibt es im Martingal-Fall eine Stopzeit (Verkaufsstrategie) T mit $E(A_T) > A_0$?

Die folgenden Sätze 8, 9 und 11 sind Varianten des *optional sampling theorems*.

Satz 8.

$$(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0} \text{ Martingal} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, T \text{ beschränkte Stopzeit} : E(X_T) = E(X_0).$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Gelte $T(\omega) \leq N$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann: $E(|X_T|) \leq \sum_{t=0}^{N} E(|X_t|) < \infty$. Weiter:

$$\begin{aligned}
E(X_T) &= \sum_{t=0}^{N} E(1_{\{T=t\}} \cdot X_t) = \sum_{t=0}^{N} E(1_{\{T=t\}} \cdot E(X_N \mid \mathfrak{F}_t)) \\
&= \sum_{t=0}^{N} E(E(1_{\{T=t\}} \cdot X_N \mid \mathfrak{F}_t)) = \sum_{t=0}^{N} E(1_{\{T=t\}} \cdot X_N) = E(X_N) = E(X_0).
\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$" Für $s < t$ und $A \in \mathfrak{F}_s$ ist zu zeigen:

$$\int_A X_t \, dP = \int_A X_s \, dP.$$

Definiere

$$T = s \cdot 1_A + t \cdot 1_{\Omega \setminus A}.$$

Klar: T ist beschränkte Stopzeit. Also:

$$E(X_0) = E(X_T) = E(1_A \cdot X_s + 1_{\Omega \setminus A} \cdot X_t) = E(X_t) - E(1_A \cdot X_t) + E(1_A \cdot X_s).$$

Beachte schließlich, daß n.V. insbesondere $E(X_0) = E(X_t)$ gilt. $\square$

Satz 9. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ Martingal und T Stopzeit mit

$$P(\{T < \infty\}) = 1 \ \wedge \ E(|X_T|) < \infty \ \wedge \ \lim_{t \to \infty} \int_{\{T > t\}} |X_t| \, dP = 0.$$

Dann

$$E(X_T) = E(X_0).$$

Beweis. Für $T_n = \min\{T, n\}$ gilt

$$|E(X_T) - E(X_{T_n})| \le \int_{\{T > n\}} |X_T| \, dP + \int_{\{T > n\}} |X_n| \, dP$$

und somit $\lim_{n \to \infty} E(X_{T_n}) = E(X_T)$. Satz 8 liefert $E(X_0) = E(X_{T_n})$. $\square$

Satz 10 (Doobsche Zerlegung). Für

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} \big(X_s - E(X_s \,|\, \mathfrak{F}_{s-1})\big) + X_0, \qquad A_t = \sum_{s=1}^{t} \big(E(X_s \,|\, \mathfrak{F}_{s-1}) - X_{s-1}\big)$$

gilt

(i) $X_t = M_t + A_t$,

(ii) $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist Martingal,

(iii) $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ Submartingal $\quad \Leftrightarrow \quad (A_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ P-f.s monoton wachsend.

Beweis. Übung. $\square$

Satz 11. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ Submartingal. Für beschränkte Stopzeiten $S \le T$ gilt[20]

$$X_S \le E(X_T \,|\, \mathfrak{F}_S)$$

und somit

$$E(X_S) \le E(X_T).$$

Im Martingal-Fall gilt jeweils „=".

[20] Beachte, daß X_S $\mathfrak{F}_S$-meßbar ist. Vgl. Proposition 5 im kontinuierlichen Fall.

Beweis. Weil das Ereignis $\{X_S \ge E(X_T \,|\, \mathfrak{F}_S) + 1/n\}$ eine $\mathfrak{F}_S$–meßbare Menge ist, genügt es zu zeigen, daß

$$\int_A X_S \, \mathrm{d}P \le \int_A E(X_T \,|\, \mathfrak{F}_S) \, \mathrm{d}P \qquad \forall A \in \mathfrak{F}_S \, .$$

Wir verwenden die Doob–Meyer–Zerlegung $X = M + A$. Offenbar ist $A_S \le A_T$, also $A_S = E(A_S \,|\, \mathfrak{F}_S) \le E(A_T \,|\, \mathfrak{F}_S)$, und es bleibt zu zeigen, daß

$$\int_A M_S \, \mathrm{d}P = \int_A E(M_T \,|\, \mathfrak{F}_S) \, \mathrm{d}P = \int_A M_T \, \mathrm{d}P \, .$$

Sei $R = S \cdot \mathbb{1}_A + T \cdot \mathbb{1}_{A^c}$[21]. Dann gilt

$$\{R \le t\} = (\{S \le t\} \cap A) \cup (\{T \le t\} \cap A^c) \in \mathfrak{F}_t \, .$$

Also ist R eine beschränkte Stopzeit, und nach Satz 8 haben wir

$$E(M_T) = E(M_0) = E(M_R) = E(M_S \cdot \mathbb{1}_A) + E(M_T \cdot \mathbb{1}_{A^c}) \, ;$$

durch Subtraktion von $E(M_T \cdot \mathbb{1}_{A^c})$ folgt die Behauptung.
Ist X Martingal, so sind X und $-X$ Submartingale; aus dem schon bewiesenen folgt dann

$$E(X_S) \le E(X_T \,|\, \mathfrak{F}_S) \qquad \text{und} \qquad E(-X_S) \le E(-X_T \,|\, \mathfrak{F}_S) \, ,$$

und also die Gleichheit. $\square$

Gegeben: $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ mit $I = \{t_0, \ldots, t_n\}$ für $t_0 < \cdots < t_n$ sowie $a < b$. Definiere Stopzeiten

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf\{t \in I : X_t \le a\}, \\ T_2 &= \inf\{t \in I : X_t \ge b, \ t > T_1\}, \\ &\vdots \\ T_{2k+1} &= \inf\{t \in I : X_t \le a, \ t > T_{2k}\}, \\ T_{2k+2} &= \inf\{t \in I : X_t \ge b, \ t > T_{2k+1}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

sowie die Anzahl der *Überquerungen (Upcrossings)* des Intervalls $[a, b]$ von unten nach oben

$$U_I^X(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{falls } T_2 = \infty, \\ \max\{k \in \mathbb{N} : T_{2k} \le t_n\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 12 (Upcrossing-Inequality). Für jedes Submartingal $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ gilt

$$E(U_I^X(a, b)) \le \frac{E((X_{t_n} - a)^+) - E((X_{t_0} - a)^+)}{b - a}.$$

[21] $A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{F}_S \subseteq \mathfrak{F}_T$

Beweis. Sei OBdA $a = 0$; Da wegen der Jensenschen Ungleichung auch X^+ ein Submartingal ist und $E(U_I^X(0,b)) = E(U_I^{X^+}(0,b))$, können wir weiter oBdA $X \geq 0$ annehmen. Definiere Stopzeiten $S_0 = t_0$ und $S_i = T_i \wedge t_n$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann

$$X_{t_n} - X_{t_0} = \sum_{j=1}^{\infty}(X_{S_{2j}} - X_{S_{2j-1}}) + \sum_{j=0}^{\infty}(X_{S_{2j+1}} - X_{S_{2j}})$$

sowie

$$\sum_{j=1}^{\infty}(X_{S_{2j}} - X_{S_{2j-1}}) \geq b \cdot U_I^X(0,b).$$

Satz 11 sichert

$$E(X_{S_{2j+1}}) \geq E(X_{S_{2j}}).$$

Fazit

$$E(X_{t_n}) - E(X_{t_0}) \geq b \cdot E(U_I^X(0,b)).$$

□

Satz 13 (Submartingal-Ungleichungen). Für jedes Submartingal $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ und $\mu > 0$ gilt

$$P(\{\max_{i=0,\dots,n} X_{t_i} \geq \mu\}) \leq 1/\mu \cdot E(X_{t_n}^+),$$
$$P(\{\min_{i=0,\dots,n} X_{t_i} \leq -\mu\}) \leq 1/\mu \cdot \left(E(X_{t_n}^+) - E(X_{t_0})\right).$$

Beweis. Siehe Chung (1974, Theorem 9.4.1). □

Schließlich noch zwei Martingalkonvergenzsätze mit $I = -\mathbb{N}$ bzw. $I = \mathbb{Z}$.

Proposition 6. Gegeben: Submartingal[22] $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in -\mathbb{N}}$ mit

$$\inf_{t \in -\mathbb{N}} E(X_t) > -\infty. \tag{8}$$

Dann existiert $X_{-\infty} \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so daß

$$\lim_{t \to -\infty} X_t = X_{-\infty} \qquad P\text{-f.s. und in } L_1.$$

Beweis. Siehe Chung (1974, Theorem 9.4.7) oder Gänssler/Stute (1977, Satz 6.5.10). □

Proposition 7. Gegeben: Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ und Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $E(|Y|) < \infty$. In $L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und P-f.s. gilt

$$\lim_{t \to \infty} E(Y \mid \mathfrak{F}_t) = E\Big(Y \mid \sigma\Big(\bigcup_{t \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}_t\Big)\Big), \qquad \lim_{t \to -\infty} E(Y \mid \mathfrak{F}_t) = E\Big(Y \mid \bigcap_{t \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}_t\Big).$$

Beweis. Siehe Chung (1974, Thm. 9.4.8). □

[22] Sogenanntes inverses Submartingal.

2.2 Martingale in stetiger Zeit

Im folgenden sei $I = [0, \infty[$.

Satz 14 (Optional Sampling Theorem). Für jedes rechtsseitig stetige Martingal $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ gilt

$$\forall\, T \text{ beschränkte Stopzeit}: \quad E(X_T) = E(X_0).$$

Beweis. Gelte $T(\omega) \leq N$ für alle $\omega \in \Omega$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei T_n definiert durch

$$T_n(\omega) = k/2^n \quad \Leftrightarrow \quad T(\omega) \in [(k-1)/2^n, k/2^n[\,.$$

Für $t \in [(k-1)/2^n, k/2^n[$ zeigt Proposition 2

$$\{T_n \leq t\} = \{T_n \leq (k-1)/2^n\} = \{T < (k-1)/2^n\} \in \mathfrak{F}_{(k-1)/2^n} \subseteq \mathfrak{F}_t,$$

d.h. T_n ist Stopzeit.
Für alle $\omega \in \Omega$:

$$T_n(\omega) \leq N + 1 \quad \wedge \quad \lim_{n \to \infty} T_n(\omega) \searrow T(\omega).$$

Somit wegen der rechtsseitigen Stetigkeit:

$$\lim_{n \to \infty} X_{T_n}(\omega) = X_T(\omega). \tag{9}$$

Satz 11 zeigt

$$E(X_{N+1} \mid \mathfrak{F}_{T_n}) = X_{T_n}.$$

Also ist $\{X_{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar, siehe Übung 2.5. Mit (9) folgt

$$\lim_{n \to \infty} E(X_{T_n}) = E(X_T).$$

Schließlich ist $(X_{k/2^n})_{k \leq 2^n}$ ein Martingal, und deshalb zeigt Satz 8

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : E(X_{T_n}) = E(X_0).$$

□

Die folgenden Begriffe und Ergebnisse sind grundlegend bei der Einführung des stochastischen Integrals.

Definition 16. $\mathfrak{F}$ erfüllt die *üblichen Voraussetzungen*, falls

(i) $\mathfrak{F}$ rechtsseitig stetig,

(ii) $\{A \subseteq \Omega : \exists\, B \in \mathfrak{A} : A \subseteq B \wedge P(B) = 0\} \subseteq \mathfrak{F}_0$.

Satz 15. Erfüllt seien

(i) $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ Submartingal,

(ii) $t \mapsto E(X_t)$ rechtsseitig stetig,

(iii) die üblichen Voraussetzungen.

Dann existiert eine cadlag Modifikation Y von X, so daß $(Y_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ein Submartingal ist.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest; wir setzen $\mathbb{Q}_n := [0,n] \cap \mathbb{Q}$ und wählen eine aufsteigende Folge $Q_k \subseteq \mathbb{Q}_n$ von endlichen Teilmengen mit $\mathbb{Q}_n = \bigcup_k Q_k$. Aus Satz 13 erhalten wir

$$P(\max_{t\in Q_k} |X_t| \geq \mu) \leq \frac{2}{\mu} E(X_n^+) \ . \tag{10}$$

Weiterhin: Falss das Ereignis $\sup_{t\in\mathbb{Q}_n} |X_t| = \infty$ eintritt, so folgt, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $\sup_{t\in\mathbb{Q}_k |X_t|} \geq 2^m$; folglich hat man für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit (10):

$$P(\sup_{t\in\mathbb{Q}_n} |X_t| = \infty) \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} P(\sup_{t\in Q_k} |X_t| \geq 2^m) \leq 2^{-m+1} E(X_n^+) \ .$$

Also existiert $B \in \mathfrak{A}$ mit $P(B) = 1$ und

$$\forall\ \omega \in B\ \forall\ n \in \mathbb{N}: \qquad \sup_{t\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |X_t(\omega)| < \infty.$$

Für $a < b$ beliebig sei

$$U_n^X(a,b) = \sup_{k\in\mathbb{N}} U_{Q_k}^X(a,b)$$

sowie

$$C_n(a,b) = \{U_n^X(a,b) < \infty\}, \qquad\qquad C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{\substack{a<b\\ a,b\in\mathbb{Q}}} C_n(a,b).$$

Aus Satz 12 und der monotonen Konvergenz folgt $P(C_n(a,b)) = 1$, also $P(C) = 1$. Für $\omega \in B \cap C$ existieren die Grenzwerte

$$X_t^{\mathrm{r}}(\omega) = \lim_{s\searrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega),$$

für jedes $t \geq 0$: Wären nämlich $\alpha < \beta$ zwei Häufungspunkte von $X_s(\omega)$ für $s \searrow t$, $s \in \mathbb{Q}$, so würde für ein Intervall $[a,b] \subseteq (\alpha\beta)$ folgen, daß $U_n^X(a,b) = \infty$ für $n \geq t$. Setze $Y_t(\omega) = X^{\mathrm{r}}(t)(\omega)$ für $\omega \in B \cap C$ und andernfalls $Y_t(\omega) = 0$. Man verifiziert, daß Y ein cadlag Prozeß ist. Die üblichen Voraussetzungen sichern, daß Y zu $\mathfrak{F}$ adaptiert ist.

Sei $s \in I$. Wähle $s_n \in \mathbb{Q}$ mit $s_n \searrow s$. Für $A \in \mathfrak{F}_s$

$$\int_A X_s\, dP \leq \int_A E(X_{s_n} \mid \mathfrak{F}_s)\, dP = \int_A X_{s_n}\, dP.$$

Die L_1-Konvergenz gem. Proposition 6 liefert $E(|Y_s|) < \infty$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X_{s_n}\, dP = \int_A Y_s\, dP, \tag{11}$$

so daß

$$P(X_s \leq Y_s) = 1 \qquad \forall s \geq 0\ . \tag{12}$$

Die rechtsseitige Stetigkeit von $s \mapsto E(X_s)$ und (11) liefern

$$E(X_s) = E(Y_s),$$

Mit (12) ergibt sich $P(Y_s = X_s) = 1$ für alle $s \geq 0$, d.h. Y ist Modifikation von X. Hieraus folgt sofort, daß Y ein Submartingal ist. □

Definition 17. $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ *wachsend*, falls

(i) $A_0 = 0$,

(ii) A besitzt rechtsseitig stetige, monoton wachsende[23] Pfade,

(iii) $\forall\ t \in I : E(A_t) < \infty$.

Bemerkung 13. Wir integrieren erstmals bezüglich eines stochastischen Prozesses. Sei $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ wachsend und $(X_t)_{t\in I}$ meßbar. Dann sind die Lebesgue-Stieltjes Integrale

$$I_t^\pm(\omega) = \int_0^t X_s^\pm(\omega)\, dA_s(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

für $t \in I$ wohldefiniert. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ progressiv meßbar und gelte

$$\forall\ \omega \in \Omega : I_t^\pm(\omega) < \infty.$$

Dann ist

$$I_t(\omega) = I_t^+(\omega) - I_t^-(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

für $t \in I$ wohldefiniert, rechtsseitig stetig und progressiv meßbar.

Beispiel 6. Der Poisson-Prozeß $(N_t, \mathfrak{F}_t^N)_{t\in I}$ ist wachsend. Setze

$$J_t(\omega) = \{S_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\} \cap [0,t].$$

Dann gilt $\# J_t(\omega) = N_t(\omega) < \infty$ und für X meßbar ist

$$I_t(\omega) = \sum_{s\in J_t(\omega)} X_s(\omega).$$

Wir formulieren nun ein kontinuierliches Analogon der Doobschen Zerlegung.

Die Summe eines Martingals M und eines wachsenden Prozesses A (bzgl. derselben Filtration) ist ein Submartingal. Ist jedes Submartingal so darstellbar? Ist diese Darstellung eindeutig?

Beispiel 7. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ Poisson-Prozeß mit Intensität $\lambda > 0$. Dann

$$X_t = \underbrace{X_t - \lambda t}_{=M_t} + \underbrace{\lambda t}_{=A_t}.$$

Wir wissen: $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ist ein Martingal. Klar: $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ist wachsend.

[23] $A_s(\omega) \leq A_t(\omega)$, falls $s \leq t$.

Satz 16 (Doob-Meyer-Zerlegung). Erfüllt seien[24]

(i) $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ stetiges Submartingal,

(ii) $\forall\, t \in I: \quad X_t \geq 0$,

(iii) die üblichen Voraussetzungen.

Dann existiert ein stetiges Martingal $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ und ein stetiger wachsender Prozeß $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ mit
$$\forall\, t \in I\ \forall\, \omega \in \Omega: \quad X_t(\omega) = M_t(\omega) + A_t(\omega).$$
Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit.

Beweis. Karatzas/Shreve, (1999, Chap. 1.4). □

Korollar 1. Seien $A^{(1)}, A^{(2)}$ $\mathfrak{F}$–adaptierte stetige, wachsende, integrierbare Prozesse auf $[0, a]$, sodaß $M := A^{(1)} - A^{(2)}$ ein $\mathfrak{F}$–Martingal ist mit $M_0 = 0$. Dann sind $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ ununterscheidbar.

Beweis. Dann ist
$$A^{(1)} = 0 + A^{(1)} = M_0 + A^{(2)}\ ;$$
die Eindeutigkeit der Doob-Meyer-Zerlegung liefert die Behauptung. □

Im folgenden: $\mathfrak{F}$ erfülle die üblichen Voraussetzungen. Kurz: Martingal statt Martingal bzgl. $\mathfrak{F}$. Gleichheit von Prozessen im Sinne der Ununterscheidbarkeit.

Definition 18. X *quadratisch integrierbar*, falls
$$\forall\, t \in I : E(X_t^2) < \infty.$$

Bez.: $\mathfrak{M}_2^c = \mathfrak{M}_2^c(\mathfrak{F})$ sei der Vektorraum aller stetigen, quadratisch integrierbaren Martingale mit $X_0 = 0$.

Bemerkung 14. Klar: für $X \in \mathfrak{M}_2^c$ ist $X^2 = (X_t^2)_{t\in I}$ stetiges Submartingal.

Definition 19. *Quadratische Variation* von $X \in \mathfrak{M}_2^c$ ist der[25] stetige, wachsende Prozeß $(A_t)_{t\in I}$ in der Doob-Meyer-Zerlegung
$$X_t^2 = M_t + A_t$$
von X^2. Bez.: $\langle X\rangle_t = A_t$.

Vgl. Übung 3.3.b für den kompensierten Poisson-Prozeß.

[24] Allgemeinere Fassung bei Karatzas, Shreve (1999).
[25] Eindeutig bestimmt bis auf Ununterscheidbarkeit.

Definition 20. Für $X, Y \in \mathfrak{M}_2^c$ heißt[26]
$$\langle X, Y\rangle_t = \tfrac{1}{4}(\langle X+Y\rangle_t - \langle X-Y\rangle_t), \quad t \in I,$$
der *Kreuz-Variationsprozeß*. X und Y heißen *orthogonal*, falls
$$\langle X, Y\rangle = 0.$$

Proposition 8. Für $X, Y \in \mathfrak{M}_2^c$ gilt

(i) $\langle X, X\rangle = \langle X\rangle$,

(ii) äquivalent sind

  (a) $XY - Z$ ist Martingal $\wedge$ $Z = A' - A''$ mit A', A'' stetig, wachsend,

  (b) $Z = \langle X, Y\rangle$,

(iii) äquivalent sind

  (a) X, Y orthogonal,

  (b) XY Martingal,

  (c) $E((X_t - X_s)\cdot(Y_t - Y_s)\,|\,\mathfrak{F}_s) = 0$ für alle $0 \leq s < t$, [27]

(iv) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist symmetrisch und bilinear,

(v) $\langle X, Y\rangle^2 \leq \langle X\rangle \cdot \langle Y\rangle$.

Beweis. ad (i):
$$\langle X, X\rangle_t = \tfrac{1}{4}\langle 2X\rangle_t = \langle X\rangle_t.$$
ad (ii): „(b) ⇒ (a)“: $(X+Y)^2 - \langle X+Y\rangle$ und $(X-Y)^2 - \langle X-Y\rangle$ sind Martingale, somit auch ihre Differenz
$$(X+Y)^2 - (X-Y)^2 - \langle X+Y\rangle + \langle X-Y\rangle = 4XY - 4\langle X, Y\rangle.$$
„(a) ⇒ (b)“: Folgt aus Lemma 1.
ad (iii): „(a) ⇔ (b)“ folgt aus (ii).
„(b) ⇔ (c)“.
$$\begin{aligned} E((X_t - X_s)\cdot(Y_t - Y_s)\,|\,\mathfrak{F}_s) &= E(X_tY_t + X_sY_s - X_tY_s - X_sY_t\,|\,\mathfrak{F}_s) \\ &= E(X_tY_t\,|\,\mathfrak{F}_s) - X_sY_s. \end{aligned}$$

ad (iv): Symmetrie klar. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind
$$(\alpha X)\cdot Y - \langle \alpha X, Y\rangle \quad \text{und} \quad \alpha\cdot(XY) - \alpha\cdot\langle X, Y\rangle$$
gem. (ii) Martingale. Mit (ii) folgt ebenfalls $\alpha\langle X, Y\rangle = \langle \alpha X, Y\rangle$. Beweis der Additivität analog.
ad (v): Folgt wie üblich aus (iv) und $\langle X\rangle_t \geq 0$. □

[26] Polarisation.
[27] Inkremente sind bedingt „unkorreliert“.

Bemerkung 15. Sei $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\}$ mit $0 = t_0 < \cdots < t_m = t$ Zerlegung von $[0, t]$. Ferner sei $p \in]0, \infty[$. Dann heißt

$$V_t^{(p)}(X; \pi) = \sum_{k=1}^{m} \left| X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \right|^p$$

p-te Variation von X auf $[0, t]$ bzgl. π. Ferner heißt

$$\|\pi\| = \max_{k=1,\ldots,m} (t_k - t_{k-1})$$

die *Feinheit* von π. Dann läßt sich zeigen (vgl. Karatzas/Shreve, S.32ff.): Für $X \in \mathcal{M}_s^c$ und jede Folge π_n von Partitionen mit $\|\pi_n\| \to 0$ gilt:

$$V_t^{(2)}(X; \pi) \to \langle X \rangle_t \qquad \text{in Wahrscheinlichkeit} . \tag{13}$$

Falls $\langle X \rangle_t > 0$, so hat man für jedes $p < 2$ in (13) *fast sicher Divergenz*, und für jedes $p > 2$ Konvergenz gegen 0. Weiter: Falls $\langle X \rangle_t = 0$ für ein $t > 0$, so ist X f.s. 0 auf ganz $[0, t]$, siehe Übung 6.1. Dies zeigt:

> **Ein Prozeß $X \in \mathcal{M}_c^2$, der nicht konstant Null ist, ist mit Wahrscheinlichkeit 1 von unbeschränkter Variation.**

Somit kann man ein stochastische Integral nach X nicht 'einfach Pfad für Pfad' im Lebesgue–Stieltjes–Sinne erklären.