Skript zur Vorlesung „Stochastische Analysis"
Version vom 19.04.2007
J. Creutzig

Anhang A

Appendix: Präliminarien

1 Bedingte Erwartungen

Dies ist eine kurze Wiederholung von Stoff aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Für Beweise verweisen wir auf die angegebene Literatur:

Gänssler, Stute (1977, Kap. V), Yeh (1995, App. B, C).

oder auf das Skript *Pr.Th. 06/07*.
Gegeben: Zufallsvariable X auf Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $E(|X|) < \infty$ sowie σ-Algebra $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Stets Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

Definition 1. Jede Zufallsvariable Z auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

(i) Z ist $\mathfrak{B}$-meßbar,

(ii) $\forall\, B \in \mathfrak{B} : \int_B Z\, dP = \int_B X\, dP$

heißt (Version der) *bedingte(n) Erwartung von X gegeben* $\mathfrak{B}$. Bez.: $Z = E(X \,|\, \mathfrak{B})$. Im Falle $X = 1_A$ mit $A \in \mathfrak{A}$ heißt Z (Version der) *bedingte(n) Wahrscheinlichkeit von A gegeben* $\mathfrak{A}$. Bez.: $Z = P(A \,|\, \mathfrak{B})$.

Proposition 1. Die bedingte Erwartung existiert und ist P-f.s. eindeutig bestimmt[1].

Beweis. Spezialfall: $X \geq 0$. Durch

$$Q(B) = \int_B X\, dP, \qquad B \in \mathfrak{B},$$

wird ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{B})$ definiert. Es gilt $Q \ll P|_{\mathfrak{B}}$. Nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert eine $\mathfrak{B}$-meßbare Abbildung $Z : \Omega \to [0, \infty[$ mit

$$\forall\, B \in \mathfrak{B} : \quad Q(B) = \int_B Z\, dP.$$

[1] Im folgenden oft kurz $X = Y$ oder $X \geq Y$, falls diese Eigenschaften f.s. gelten. Ebenso identifizieren wir Abbildungen, die f.s. übereinstimmen.

Der allgemeine Fall wird durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil erledigt.
Zur Eindeutigkeit: Aus $\int_B Z_1\, dP|_{\mathfrak{B}} = \int_B Z_2\, dP|_{\mathfrak{B}}$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ folgt $Z_1 = Z_2$ $P|_{\mathfrak{B}}$-f.s. □

Beispiel 1. Betrachte meßbare Partititon $B_1, \dots, B_n$ von Ω mit $P(B_j) > 0$ für $j = 1, \dots, n$. Die erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B} = \sigma(\{B_1, \dots, B_n\})$ ist

$$\mathfrak{B} = \left\{ \bigcup_{j \in J} B_j : J \subseteq \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Es gilt

$$E(X \,|\, \mathfrak{B})(\omega) = \sum_{i=1}^{n} E(X \,|\, B_i) \cdot 1_{B_i}(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

wobei

$$E(X \,|\, B) = \frac{E(1_B \cdot X)}{P(B)}$$

die elementare bedingte Erwartung von X gegeben B bezeichnet.
Extremfälle: $n = 1$, also $\Omega = B_1$ und $\mathfrak{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ sowie $E(X \,|\, \mathfrak{B}) = E(X)$.
$|\Omega| = n$, also $|B_i| = 1$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{P}(\Omega)$ sowie $E(X \,|\, \mathfrak{B}) = X$.

Die „explizite" Bestimmung von bedingten Erwartungen ist i.a. nicht-trivial.

Bemerkung 1. Klar:

$$E(X) = \int_\Omega E(X \,|\, \mathfrak{B})\, dP = E(E(X \,|\, \mathfrak{B})).$$

Ferner: $E(X \,|\, \mathfrak{B}) = X$, falls X $\mathfrak{B}$-meßbar.

Proposition 2. Die bedingte Erwartung ist positiv und linear.

Beweis. Folgt aus den entsprechenden Eigenschaften des Integrals und den Abschluß-eigenschaften von Mengen meßbarer Abbildungen. □

Proposition 3. Sei Y $\mathfrak{B}$-meßbar mit $E(|X \cdot Y|) < \infty$. Dann

$$E(X \cdot Y \,|\, \mathfrak{B}) = Y \cdot E(X \,|\, \mathfrak{B}).$$

Beweis. Klar: $Y \cdot E(X \,|\, \mathfrak{B})$ ist $\mathfrak{B}$-meßbar.
Spezialfall: $Y = 1_C$ mit $C \in \mathfrak{B}$. Dann gilt für $B \in \mathfrak{B}$:

$$\int_B Y \cdot E(X \,|\, \mathfrak{B})\, dP = \int_{B \cap C} E(X \,|\, \mathfrak{B})\, dP = \int_{B \cap C} X\, dP = \int_B X \cdot Y\, dP.$$

Jetzt algebraische Induktion. □

Proposition 4. Für σ-Algebren $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{A}$ gilt

$$E(E(X \,|\, \mathfrak{B}_1) \,|\, \mathfrak{B}_2) = E(X \,|\, \mathfrak{B}_1) = E(E(X \,|\, \mathfrak{B}_2) \,|\, \mathfrak{B}_1).$$

Beweis. Die erste Identität folgt mit Bemerkung 1. Zur zweiten Identität beachte man für $B \in \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2$

$$\int_B E(E(X \,|\, \mathfrak{B}_2) \,|\, \mathfrak{B}_1)\, dP = \int_B E(X \,|\, \mathfrak{B}_2)\, dP = \int_B X\, dP.$$

□

Proposition 5. Seien X und $\mathfrak{B}$ unabhängig. Dann

$$E(X \,|\, \mathfrak{B}) = E(X).$$

Beweis. Klar: $E(X)$ $\mathfrak{B}$-meßbar. Sei $B \in \mathfrak{B}$. Nach Voraussetzung sind X und 1_B unabhängig. Also

$$\int_B E(X)\, dP = E(X) \cdot E(1_B) = E(X \cdot 1_B) = \int_B X\, dP.$$

□

Proposition 6 (Jensensche Ungleichung). Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und gelte $X(\omega) \in J$ für alle $\omega \in \Omega$. Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ konvex mit $E(|\phi \circ X|) < \infty$. Dann:

$$\phi(E(X \,|\, \mathfrak{B})) \leq E(\phi \circ X \,|\, \mathfrak{B}).$$

Beweis. Gänssler, Stute (1977, Kap. V.4). □

Bemerkung 2. Spezialfall: $J = \mathbb{R}$ und $\phi(u) = |u|^p$ mit $p \geq 1$. Dann:

$$E(|X| \,|\, \mathfrak{B}) \leq \left(E(|X|^p \,|\, \mathfrak{B})\right)^{1/p}.$$

Hiermit

$$\left(E(|X|^q \,|\, \mathfrak{B})\right)^{1/q} \leq \left(E(|X|^p \,|\, \mathfrak{B})\right)^{1/p}$$

für $1 \leq q \leq p$ sowie

$$\left(\int_\Omega |E(X \,|\, \mathfrak{B})|^p\, dP\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |X|^p\, dP\right)^{1/p}.$$

Also ist $E(\cdot \,|\, \mathfrak{B})$ ein idempotenter beschränkter linearer Operator auf $L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Speziell für $p = 2$: orthogonale Projektion auf den Unterraum $L_2(\Omega, \mathfrak{B}, P)$.

Oft liegt folgende Situation vor. Gegeben: Meßraum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung $Y : \Omega \to \Omega'$. Betrachte die von Y erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B} = \sigma(\{Y\})$.

Definition 2. *Bedingte Erwartung von X gegeben Y:*

$$E(X \,|\, Y) = E(X \,|\, \sigma(\{Y\})).$$

Anwendung von Proposition **??** auf obige Situation: *Faktorisierung der bedingten Erwartung*: Es existiert eine $\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung $g : \Omega' \to \mathbb{R}$ mit

$$E(X \,|\, Y) = g \circ Y.$$

Je zwei solche Abbildungen stimmen P_Y-f.s. überein.

Definition 3. *Bedingte Erwartung von X gegeben $Y = y$:*

$$E(X \mid Y = y) = g(y),$$

wobei g wie oben gewählt.

Analoge Begriffsbildung für bedingte Wahrscheinlichkeiten, wobei $X = 1_A$ mit $A \in \mathfrak{A}$.

Beispiel 2. Gelte $(\Omega, \mathfrak{A}, P) = ([0,1], \mathfrak{B}([0,1], \lambda)$ und $(\Omega', \mathfrak{A}') = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Ferner

$$X(\omega) = \omega^2, \qquad\qquad Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in [0, 1/2], \\ \omega - 1/2, & \text{falls } \omega \in \,]1/2, 1]. \end{cases}$$

Dann

$$\sigma(\{Y\}) = \{A \cup B : A \in \{\emptyset, [0,1/2]\},\ B \subseteq \,]1/2, 1]\,,\ B \in \mathfrak{A}\}$$

sowie

$$E(X \mid Y)(\omega) = \begin{cases} 1/12, & \text{falls } \omega \in [0, 1/2], \\ \omega^2, & \text{falls } \omega \in \,]1/2, 1] \end{cases}$$

und

$$E(X \mid Y = y) = \begin{cases} 1/12, & \text{falls } y = 1, \\ (y + 1/2)^2, & \text{falls } y \in \,]0, 1/2]. \end{cases}$$

Beachte, daß $P(\{Y = y\}) = 0$ für alle $y \in \,]0, 1/2]$.

Bemerkung 3. Klar: für $A' \in \mathfrak{A}'$ gilt

$$\int_{\{Y \in A'\}} X \, dP = \int_{A'} E(X \mid Y = y) \, dP_Y(y)$$

und insbesondere

$$P(A \cap \{Y \in A'\}) = \int_{A'} P(A \mid Y = y) \, dP_Y(y)$$

für $A \in \mathfrak{A}$.

Wie der folgende Satz zeigt, ist die bedingte Erwartung der beste Schätzer im Quadratmittel.

Proposition 7. Gelte $E(X^2) < \infty$. Dann gilt für jede $\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung $\phi : \Omega' \to \mathbb{R}$

$$\int_\Omega (X - E(X \mid Y))^2 \, dP \le \int_\Omega (X - \phi \circ Y)^2 \, dP$$

mit Gleichheit gdw. $\phi = E(X \mid Y = \cdot)$ P_Y-f.s.

Beweis. Setze $Z^* = E(X \mid Y)$ und $Z = \phi \circ Y$. Die Jensensche Ungleichung liefert

$$E((Z^*)^2) = E(E(X \mid Y)^2) \le E(E(X^2 \mid Y)) = E(X^2) < \infty.$$

OBdA: $E(Z^2) < \infty$. Dann

$$E(X-Z)^2 = E(X-Z^*)^2 + \underbrace{E(Z^*-Z)^2}_{\geq 0} + 2 \cdot E((X-Z^*)(Z^*-Z)).$$

Mit den Propositionen **??**, 2 und 3 folgt

$$\begin{aligned} E((X-Z^*)(Z^*-Z)) &= \int_\Omega E((X-Z^*)(Z^*-Z) \,|\, Y)\, dP \\ &= \int_\Omega (Z^*-Z) \cdot E((X-Z^*) \,|\, Y)\, dP \\ &= \int_\Omega (Z^*-Z) \cdot \underbrace{(E(X \,|\, Y) - Z^*)}_{=0}\, dP. \end{aligned}$$

□

Frage: Sind durch $A \mapsto P(A \,|\, Y = y)$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ gegeben? Sind ggf. die bedingten Erwartungen $E(X \,|\, Y = y)$ die Erwartungswerte von X bzgl. dieser Wahrscheinlichkeitsmaße?

Definition 4. *Reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben Y*: Abbildung

$$P^{\mathfrak{A}|Y} : \mathfrak{A} \times \Omega' \to \mathbb{R}$$

mit

(i) $P^{\mathfrak{A}|Y}(\cdot, y)$ Wahrscheinlichkeitsmaß für jedes $y \in \Omega'$,

(ii) $P^{\mathfrak{A}|Y}(A, \cdot)$ $\mathfrak{A}'$-meßbar für jedes $A \in \mathfrak{A}$,

(iii) $P(A \cap \{Y \in A'\}) = \displaystyle\int_{A'} P^{\mathfrak{A}|Y}(A, y)\, dP_Y(y)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ und $A' \in \mathfrak{A}'$.

Bemerkung 4. Klar wg. (ii), (iii): $P^{\mathfrak{A}|Y}(A, y) = P(A \,|\, Y = y)$.

Proposition 8. Es sei Ω' ein polnischer Raum und $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}(\Omega')$ die Borelsche σ–Algebra auf Ω'. Dann existiert eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben Y. Für je zwei solche Wahrscheinlichkeiten $P_i^{\mathfrak{A}|Y}$ existiert $A' \in \mathfrak{A}'$ mit $P_Y(A') = 1$ und

$$\forall\, y \in A'\ \forall\, A \in \mathfrak{A} : \quad P_1^{\mathfrak{A}|Y}(A, y) = P_2^{\mathfrak{A}|Y}(A, y).$$

Beweis. Siehe Gänssler, Stute (1977, Kap. V.3) oder Yeh (1995, App. C). □

Proposition 9. In der Situation von Definition 4 gilt

(i) $\displaystyle\int_\Omega X(\omega)\, dP^{\mathfrak{A}|Y}(\omega, \cdot)$ $\mathfrak{A}'$-meßbar,

(ii) $\displaystyle\int_{A'} \int_\Omega X(\omega)\, dP^{\mathfrak{A}|Y}(\omega, y)\, dP_Y(y) = \int_{\{Y \in A'\}} X\, dP$ für $A' \in \mathfrak{A}'$.

Also für P_Y-f.a. $y \in \Omega'$

$$E(X \mid Y = y) = \int_\Omega X(\omega)\, dP^{\mathfrak{A}\mid Y}(\omega, y).$$

Beweis. Algebraische Induktion. $\square$

Proposition 10. In der Situation von Proposition 8 gilt für P_Y-f.a. $y \in \Omega'$

$$\forall\ A' \in \mathfrak{A}' : \quad P^{\mathfrak{A}\mid Y}(Y^{-1}(A')), y) = 1_{A'}(y).$$

Beweis. Siehe Yeh (1995, p. 486). $\square$

2 Funktionen von beschränkter Variation und das Lebesque-Stieltjes-Integral

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a < b$ setzen wir

$$V_a^b(f) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^m |f(t_k) - f(t_{k-1})| : m \in \mathbb{N},\ a = t_0 < \cdots < t_m = b\Big\}.$$

Definition 5. f von *beschränkter Variation (b.V.)*, falls

$$\forall\ a < b : \qquad V_a^b(f) < \infty.$$

Satz 1 (Jordanscher Zerlegungssatz). Äquivalent sind

(i) f b.V. (und rechtsseitig stetig),

(ii) $\exists\ f_1, f_2$ monoton wachsend (und rechtsseitig stetig) mit $f = f_1 - f_2$.

Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf eine Konstante.

Zu f b.V. und rechtsseitig stetig sowie f_1, f_2 wie oben erhält man ein signiertes Maß[2] μ_f auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ per

$$\mu_f(]u, v]) = (f_1(v) - f_1(u)) - (f_2(v) - f_2(u)), \qquad u < v.$$

Satz 2 (Rieszscher Darstellungssatz auf $\mathbb{R}$). Durch

$$f \mapsto \mu_f$$

wird eine lineare Bijektion

$$\{f : f \text{ b.V. und rechtsseitig stetig},\ f(0) = 0\} \to \{\mu : \mu \text{ signiertes Maß auf } \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$$

definiert.

[2]Ein signiertes Maß ist einfach eine Differenz zweier endlicher Maße, also $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

Integrale bzgl. signierter Maße werden als Differenz der Integrale bzgl. des Positiv- und des Negativteils des Maßes definiert. Betrachten wir ohne Einschränkung ein signiertes Maß μ_f mit $f = f_1 - f_2$ wie oben, so ist dessen Positiv- und Negativteil durch μ_{f_1} und μ_{f_2}, also durch die nicht-negativen Maße mit den Verteilungsfunktionen f_1 und f_2 gegeben.

Falls für eine meßbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Integrale bezüglich μ_{f_1} und μ_{f_2} existieren, bezeichnet man

$$\int_{\mathbb{R}} g\, df = \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_f = \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_{f_1} - \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_{f_2}$$

als *Lebesgue-Stieltjes Integral* von g bzgl. f. Im Spezialfall einer stetigen Funktion g mit kompaktem Träger liegt ein sogenanntes Riemann-Stieltjes-Integral vor, das sich als Grenzwert von Riemann-Stieltjes-Summen der Form

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) \cdot (f(t_{i+1}) - f(t_i))$$

berechnen laßt. Diese Interpretation als Grenzwert bzgl. f gewichteter 'Mittel' von g ist physikalisch von großer Relevanz.

Literatur

K. Floret, Maß- und Integrationstheorie, Teubner, Stuttgart, 1981.

H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Teubner, Stuttgart, 2001.

Rudin, The LaPlace Transform, ??