TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2004
29.06.04

10. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

Aufgabe 1: Seien $M \in \mathfrak{M}_2^c$, $X, Y \in \mathfrak{L}^*(M)$, und ξ, η seien $\mathfrak{F}_0$–meßbare, beschränkte Zufallsgrößen. Zeigen Sie:

$$\int_0^t (\xi X_s + \eta Y_s) \, \mathrm{d}M_s = \xi \cdot \int_0^t X_s \, \mathrm{d}M_s + \eta \cdot \int_0^t Y_s \, \mathrm{d}M_s \ .$$

(*Hinweis:* Machen Sie sich erst einmal klar, was zu zeigen ist.)

Aufgabe 2. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Berechnen Sie

$$X_t = \int_0^t g(W_u) \, dW_u,$$

wobei W eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0 bezeichnet. Suchen Sie ein paar nette Beispiele für g.
(*Hinweis:* Ito–Formel.)

Aufgabe 3: Sei $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{M}_2^c$.

a) Zeigen Sie, daß ein quadratisch-integrierbares Martingal X mit $X_0 = 0$ und

$$\lim_{n \to \infty} \|X - X^{(n)}\| = 0$$

existiert.

b) Zeigen Sie, daß P-fast alle Pfade einer geeigneten Modifikation von X stetig sind. (*Hinweis*: Satz I.2.2.15 gibt Rechtsstetigkeit; für Stetigkeit nutze Satz I.2.1.13, verallgemeinert auf Intervalle $[0, T]$ und rechtsstetige Martingale:

$$\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,T]} |X_t^{(n)} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-1} \mathbb{E} \, |X_t^{(n)} - X_t| \ ;$$

(vgl. auch z.B. Theorem 1.3.8 in Karatzas/Shreve)

c) Folgern Sie, daß $\mathfrak{M}_2^c$ vollständig ist.