

**8. Aufgabenblatt zur Vorlesung
„Stochastische Analysis“**

Aufgabe 1:

Sei B eine Brownsche Bewegung und $0 \leq a \leq b$; ferner seien

$$T_a = \inf\{t : S_t \geq a\}, \quad S_t = \inf\{a : T_a \geq t\} .$$

(i) Man zeige

$$\mathbb{P}(S_t > b, B_t < a) = \mathbb{P}(B_t < a - 2b) .$$

(ii) Zeigen Sie, daß $S_t - B_t \stackrel{d}{=} |B_t|$ für jedes $t \geq 0$.

(iv) Es sei $B_t^{(a)} := a^{-1}B_{a^2t}$. Zeigen Sie, daß¹

$$T_a(B) = a^2T_1(B^{(a)}) ,$$

und folgern Sie $T_a \stackrel{d}{=} a^2T_1$.

(v) Zeigen Sie weiter, daß $T_a \stackrel{d}{=} (a/S_1)^2 \stackrel{d}{=} (a/B_1)^2$.

(vi) Sei $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ eine von B unabhängige Brownsche Bewegung. Bestimmen Sie die Verteilung von $\beta_{T_a(B)}$.

¹Notation: $T(X)$: Stopzeit, die man erhält, wenn man die Regel zur Erzeugung von T auf X anwendet.