TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2004
08.06.04

Lösung zum 8. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis"

Aufgabe 1:

Sei B eine Brownsche Bewegung und $0 \leq a \leq b$; ferner seien

$$T_a = \inf\{t \ : \ S_t \geq a\}, \qquad S_t = \inf\{a \ : \ T_a \geq t\} \ .$$

(i) Man zeige
$$\mathbb{P}(S_t > b, B_t < a) = \mathbb{P}(B_t < a - 2b) \ .$$

(ii) Zeigen Sie, daß $S_t - B_t \stackrel{d}{=} |B_t|$ für jedes $t \geq 0$.

(iv) Es sei $B_t^{(a)} := a^{-1} B_{a^2 t}$. Zeigen Sie, daß[1]
$$T_a(B) = a^2 T_1(B^{(a)}) \ ,$$
und folgern Sie $T_a \stackrel{d}{=} a^2 T_1$.

(v) Zeigen Sie weiter, daß $T_a \stackrel{d}{=} (a/S_1)^2 \stackrel{d}{=} (a/B_1)^2$.

(vi) Sei $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ eine von B unabhängige Brownsche Bewegung. Bestimmen Sie die Verteilung von $\beta_{T_a(B)}$.

Lösungsvorschlag:

(i) Zuerst stellt man fest, daß $S_t = \max_{s \leq t} B_t$, denn $S_t \geq a \Leftrightarrow T_a \leq t \Leftrightarrow \max_{s \leq t} B_s \geq a$. Aus dem Reflexionsprinzip (Satz II.3.3.7) folgt nun (analog zum Beweis von Korollar II.3.3.2), daß für den an T_b gespiegelten Prozeß B^{T_b} gilt:
$$\mathbb{P}(S_t > b, B_t < a) = \mathbb{P}(T_b < t, B_t < a) = \mathbb{P}(T_b < t, B_t^{T_b} < a) \ .$$

[1] Notation: $T(X)$: Stopzeit, die man erhält, wenn man die Regel zur Erzeugung von T auf X anwendet.

(Die letzte Gleichung rührt daher, daß die Paare (T_b, B_t) und $(T_b, B^{T_b}_{T_b})$ die gleiche Verteilung haben – schlicht weil $T_b = T_b(B^{T_b})$.) Nun ist aber auf $T_b < t$ natürlich $B^{T_b}_t = 2b - B_t$, also haben wir

$$\mathbb{P}(S_t > b, B_t < a) = \mathbb{P}(T_b < t, B_t > 2b - a) = \mathbb{P}(B_t > 2b - a)\ .$$

(Hier folgt die letzte Gleichung, weil die zweite Bedingung die erste impliziert.) Wegen Symmetrie von B_t erhält man die Behauptung.

(ii) Am einfachsten ist es, aus (ii) die zweidimensionale Dichte von (S_t, B_t) herauszuholen: Da für $a \leq b$

$$\mathbb{P}_{(S_t,B_t)}(]b,\infty[\times]-\infty,a[) = \mathbb{P}(B_t < a-2b) = (2\pi t)^{-1/2}\int_{-\infty}^{a-2b} e^{-x^2/2t}dx\ ,$$

ist die Dichte gegeben durch

$$p(b,a) = (-\frac{d}{db})(\frac{d}{da})\mathbb{P}(B_t < a - 2b) = (\pi/(2t^3))^{-1/2}(2b-a)e^{-(a-2b)^2/2t}\ .$$

Nun folgt für $\eta > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_t - B_t \geq \eta) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{b-\eta} (2/(\pi t^3))^{1/2}(2b-a)e^{-(2b-a)^2/2t}dadb \\ &= \int_0^\infty (2/(\pi t))^{1/2}e^{(2b-(b-\eta))^2/2t}db \\ &= 2\int_\eta^\infty (2\pi t)^{-1/2}e^{x^2/2t}dx\ .\end{aligned}$$

Das impliziert die Behauptung.

(iv)

$$T_1(B^{(a)}) = \inf\big\{t\ :\ a^{-1}B_{a^2t} \geq 1\big\} = a^{-2}\inf\big\{(a^2t)\ :\ B_{(a^2t)} \geq a\big\} = a^{-2}T_a\ .$$

(v) OBdA sei $a = 1$, dann folgt:

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t) = \mathbb{P}(S_t \geq 1) = \mathbb{P}(|B_t| \geq 1) = \mathbb{P}(|B_1| \geq 1/\sqrt{t}) = \mathbb{P}(S_1 \geq 1/\sqrt{t}) = \mathbb{P}(S_1^{-2} \leq t)\ .$$

(vi) Wir behaupten, daß $\beta_{T_a} \stackrel{d}{=} \sqrt{T_a}\beta_1$. Hierzu berechnen wir die charakteristische Funktion. Wegen der Unabhängigkeit können wir annehmen, daß der W.raum in Produkform $\Omega_1 \times \Omega_2$ vorliegt, und $T_a = T_a(\omega_1)$, $\beta = \beta(\omega_2)$. Dann ist (Fubini, beschränkter Integrand)

$$\mathbb{E}\, e^{i\lambda\beta_{T_a}} = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} e^{i\lambda\beta(\omega_2)_{T_a(\omega_1)}} d\mathbb{P}_2(\omega_2) d\mathbb{P}_1(\omega_1) = \int_{\Omega_1} e^{i\lambda\sqrt{T_a(\omega_1)}\beta_1(\omega_2)} d\mathbb{P}(\omega_2) d\mathbb{P}(\omega_1)\ ;$$

dies ist aber die char. Fkt. von $\sqrt{T_a}\beta_1$. Also haben wir (B_1, β_1 und T_a, β_1 unabhängig!)

$$\beta_{T_a} \stackrel{d}{=} \sqrt{T_a}\beta_1 \stackrel{d}{=} a\frac{\beta_1}{|B_1|}\ .$$

Nun muss man sich noch fragen, was die Verteilung des Quotienten ist; nach einer gerade noch endlichen Suchzeit findet man, daß ein Quotient g/h mit g, h unabhängigen Standardnormalverteilungen Cauchyverteilt ist (Hodgson's Paradox); weiter gilt in diesem Falle, daß $g/h \stackrel{d}{=} g/|h|$, da $\mathrm{sign}(h)$ unabhängig von g, $|h|$ und $g \stackrel{d}{=} \mathrm{sign}(h)g$.