TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2007
01.06.07

7. Aufgabenblatt zur Vorlesung
„Stochastische Analysis“

Aufgabe 1:
Es sei $p > 0$ gegeben. Finden Sie einen unstetigen Prozeß X, sodaß für ein geeignetes $C > 0$ für alle $t, s \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}\,|X_s - X_t|^p \leq C|t - s|\ .$$

(*Hinweis:* Untersuchen Sie Prozesse der Form $X_t = \mathbb{1}_{\xi \leq t}$ mit einer passenden nichtnegativen Zufallsvariablen ξ.)

Aufgabe 2:
Es sei X ein $\mathfrak{F}$ adaptierter Prozeß und Y eine Modifikation von X. Zeigen Sie: Falls $\mathfrak{F}$ die üblichen Voraussetzungen erfüllt, ist auch Y $\mathfrak{F}$–adaptiert.

(!*)Aufgabe 3:
Sei B eine Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie für jede Folge t_n mit $t_n \geq n$, daß $B_{t_n}/t_n \to 0$ $\mathbb{P}$–f.s..
(*Hinweis:* Borel–Cantelli.)

b) Zeigen Sie: Für eine monotone Folge t_n mit $|t_n - t_{n-1}| \geq t_n/2$, gilt fast sicher

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{B_{t_n} - B_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n}} = \infty\ .$$

Hinweis: Wieder Borel–Cantelli; man beachte die unabhängigen Zuwächse.

c) Beweisen Sie, daß $\mathbb{P}$–f.s. gilt:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty\ .$$

Hinweis: Nutzen Sie b) mit einer Folge t_n, die noch $t_{n-1}^2 \leq t_n$ erfüllt.

d) Folgern Sie: Die eindimensionale Brownsche Bewegung ist *rekurrent*, d.h. für jedes $s \geq 0$ ist die Menge $\Gamma_s(\omega) = \{t \geq s \ : B_t(\omega) = B_s(\omega)\}$ ist f.s. unbeschränkt.