TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2007
01.06.07

7. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

Aufgabe 1:
Es sei $p > 0$ gegeben. Finden Sie einen unstetigen Prozeß X, sodaß für ein geeignetes $C > 0$ für alle $t, s \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}\,|X_s - X_t|^p \leq C|t-s|\ .$$

(*Hinweis:* Untersuchen Sie Prozesse der Form $X_t = \mathbb{1}_{\xi \leq t}$ mit einer passenden nichtnegativen Zufallsvariablen ξ.)

Loesungsvorschlag: Sei ξ absolutstetig mit beschränkter Dichte p, dann $|X_s - X_t| = 1 \Leftrightarrow \xi \in]s,t]$, also

$$\mathbb{E}\,|X_s - X_t|^p = \int_s^t p(x)dx \leq |s-t| \sup_x |p(x)|\ .$$

Aufgabe 2:
Es sei X ein $\mathfrak{F}$ adaptierter Prozeß und Y eine Modifikation von X. Zeigen Sie: Falls $\mathfrak{F}$ die üblichen Voraussetzungen erfüllt, ist auch Y $\mathfrak{F}$–adaptiert.

Loesungsvorschlag: Es ist nur zu zeigen, daß Y_t $\mathfrak{F}_t$–adaptiert ist. Aber das ist leicht; sei Ω_0 $\mathfrak{A}$–meßbar vom Maß 0, sodaß für $\omega \notin \Omega_0$ gilt: $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$. Dann ist

$$Y_t = \mathbb{1}_{\Omega_0} Y_t + \mathbb{1}_{\Omega_0^c} X_t\ .$$

Letztere Zufallsgröße ist $\mathfrak{F}_t$–meßbar, erstere ist auch $\mathfrak{F}_t$–meßbar, da für A borelmeßbar mit $0 \notin A$ gilt:

$$\{\mathbb{1}_{\Omega_0} Y_t \in A\} = \Omega_0 \cap \{Y_t \in A\} \subseteq \Omega_0\ ,$$

und $\mathfrak{F}_t$ vollständig ist.

(!*)Aufgabe 3:
Sei B eine Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie für jede Folge t_n mit $t_n \geq n$, daß $B_{t_n}/t_n \to 0$ $\mathbb{P}$–f.s.. (*Hinweis:* Borel–Cantelli.) **Lösungsvorschlag:** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und η eine $\mathbb{N}(0,1)$–verteilte Zufallsgröße; offenbar ist

$$\mathbb{P}(B_{t_n}/t_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(\eta > \sqrt{t_n}\varepsilon) = \int_{\sqrt{t_n}\varepsilon}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt \ .$$

Nun ist das letzte Integral leicht abzuschätzen:

$$\int_{\lambda}^{\infty} e^{-t^2/2} = \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)^2/2} = \int_0^{\infty} e^{-s^2/2-\lambda s-\lambda^2/2} \leq e^{-\lambda^2/2}\sqrt{\pi/2} \ .$$

Damit hat man

$$\mathbb{P}(B_{t_n}/t_n > \varepsilon) \leq c \cdot \sqrt{t_n}\varepsilon e^{-t_n\varepsilon^2/2} \ ,$$

und also folgt (beachte $t_n \geq n$), daß

$$\sum_n \mathbb{P}(|B_{t_n}/t_n| > \varepsilon) < \infty \ .$$

Aus dem Lemma von Borel–Cantelli folgt, daß $\mathbb{P}(|B_{t_n}/t_n| > \varepsilon \text{u.o.}) = 0$, und damit $|B_{t_n}/t_n| \to 0$.

b) Zeigen Sie: Für eine monotone Folge t_n mit $|t_n - t_{n-1}| \geq t_n/2$, gilt fast sicher

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{B_{t_n} - B_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n}} = \infty \ .$$

Hinweis: Wieder Borel–Cantelli; man beachte die unabhängigen Zuwächse.

Lösungsvorschlag: Es gilt wegen der Voraussetzung, daß

$$\frac{W_{t_n} - W_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n}} \geq \sqrt{2}\frac{W_{t_n} - W_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n - t_{n-1}}} \ .$$

Die Folge $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}/\sqrt{t_n - t_{n-1}})$ ist eine Folge von unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsgrößen; daher folgt für jedes $T > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\frac{W_{t_n} - W_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n}} \geq T\Big) \geq \mathbb{P}\Big(\frac{W_{t_n} - W_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n - T_{n-1}}} \geq T/\sqrt{2}\Big) = C_T \ .$$

Daher ist
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\frac{W_{t_n} - W_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n}} \geq T\Big) = \infty \ ,$$
und da die Ereignisse unabhängig sind, folgt
$$\mathbb{P}(\frac{W_{t_n} - W_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n}} \geq T \text{u.o.}) = 1 \ ;$$
folglich also mit W.keit 1, daß $\frac{W_{t_n} - W_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n}} \to \infty$.

c) Beweisen Sie, daß $\mathbb{P}$–f.s. gilt:
$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = - \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty \ .$$

Hinweis: Nutzen Sie b) mit einer Folge t_n, die noch $t_{n-1}^2 \leq t_n$ erfüllt.

Lösungsvorschlag: Sei $t_n = 2^{n^2}$. Dann gilt für $n \geq 2$, daß $2(n-1)^2 \leq n^2$, und folglich $t_{n-1}^2 \leq t_n$. Nach Teil a) und b) existiert eine Menge Ω_1 von vollem Maß, auf der gilt:
$$\frac{W_{t_n}}{t_n} \to 0 \qquad \text{und} \qquad \overline{\lim} \frac{W_{t_n} - W_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n}} = \infty \ .$$
Nun ist aber nach Voraussetzung
$$\frac{|W_{t_{n-1}}|}{\sqrt{t_n}} \leq \frac{|W_{t_{n-1}}|}{t_{n-1}} \ ,$$
und damit gilt auf Ω_1, daß
$$\overline{\lim} \frac{W_{t_n}}{\sqrt{t_n}} = \infty \ .$$

d) Folgern Sie: Die eindimensionale Brownsche Bewegung ist *rekurrent*, d.h. für jedes $s \geq 0$ ist die Menge $\Gamma_s(\omega) = \{t \geq s \ : B_t(\omega) = B_s(\omega)\}$ ist f.s. unbeschränkt.

Loesungshinweis: Es genügt, die Aussage für $s = 0$ zu beweisen, also die Menge $\{t \ : \ B_t = 0\}$. Fast jeder Pfad von B_t ist stetig und hat $\overline{\lim} = \infty$, $\underline{\lim} = -\infty$; folglich kreuzt jeder Pfad unendlich oft die Null. **Bemerkung:** Das gilt für die zweidimensionale Bewegung in leicht abgeänderter Form weiter, für die dreidimensionale Brownsche Bewegung aber nicht mehr.