TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2007
23.05.07

**6. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“**

**(!)Aufgabe 1:** Sei $X \in \mathfrak{M}_c^2$ mit $X_0 = 0$ und $T$ eine Stopzeit, sodaß $\langle X \rangle_T = 0$ f.s.. Zeigen Sie, daß

$$P\left(\bigcap_{t \in I} \{X_{T \wedge t} = 0\}\right) = 1 \ .$$

**Aufgabe 2:** Wir setzen Aufgabe 5.4 fort; sei $B$ eine Standard-Brownsche Bewegung.

(i) Sei $a > 0$ und $B_t^a := B_t + a$ sowie $T_0 = \inf\{t \geq 0 \ : \ B_t^a = 0\}$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\sup_{t<T_0} B_t^a$.

(ii) Sei $\mu > 0$. Nutzen Sie das Martingal $M_t := \exp(\mu B_t - \mu^2/2t)$, um zu zeigen: Die Zufallsgröße $Y := \sup_{t \geq 0} B_t - \mu/2t$ ist exponentialverteilt mit Parameter $\mu$.

**Aufgabe 3:** Ist $(X, \mathfrak{F})$ ein Martingal, so gilt für $u \leq v < t \leq s$,

$$\mathbb{E}\,(X_t - X_s)(X_u - X_v) = 0 \ ,$$

sowie

$$\mathbb{E}\,(X_t - X_s)^2 = \mathbb{E}\,X_t^2 - \mathbb{E}\,X_s^2 \ .$$