TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2007
23.05.07

6. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

(!)Aufgabe 1: Sei $X \in \mathfrak{M}_c^2$ mit $X_0 = 0$ und T eine Stopzeit, sodaß $\langle X \rangle_T = 0$ f.s.. Zeigen Sie, daß

$$P\left(\bigcap_{t\in I}\{X_{T\wedge t} = 0\}\right) = 1 \ .$$

Loesungsvorschlag: Die quadratische Variation $\langle X \rangle.$ ist ein nichtnegativer, monoton wachsender Prozeß. Aus der Voraussetzung $\langle X \rangle_T = 0$ P-f.s. folgt also sofort $\langle X \rangle_{T\wedge t} = 0$ P-f.s.. gelten, sonst wäre $\langle X \rangle_T > 0$.)

Mit dem Optional Sampling Theorem und $M_t = X_t^2 - \langle X \rangle_t$ erhält man jetzt

$$0 = E(M_0) = E(M_{T\wedge t}) = E(X_{T\wedge t}^2 - \langle X \rangle_{T\wedge t}) = E(X_{T\wedge t}^2)$$

für alle $t \in I$. Daraus folgt $X_{T\wedge t} = 0$ P-f.s. für alle $t \in I$. Aufgrund der Stetigkeit von X ist dies äquivalent zu der zu zeigenden Aussage.

Aufgabe 2: Wir setzen Aufgabe 5.4 fort; sei B eine Standard-Brownsche Bewegung.

(i) Sei $a > 0$ und $B_t^a := B_t + a$ sowie $T_0 = \inf\{t \geq 0 \ : \ B_t^a = 0\}$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\sup_{t<T_0} B_t^a$.

(ii) Sei $\mu > 0$. Nutzen Sie das Martingal $M_t := \exp(\mu B_t - \mu^2/2t)$, um zu zeigen: Die Zufallsgröße $Y := \sup_{t\geq 0} B_t - \mu/2t$ ist exponentialverteilt mit Parameter μ.

Loesungsvorschlag: (i): Der Prozeß $(B_{t\wedge T_0}^a)$ ist ein nichtnegatives Martingal nach Aufgabe 5.1. Weiter ist T_0 nach Aufgabe 5.3 fast sicher endlich, und insbesondere konvergiert das Martingal gegen Null. Damit folgt aus Aufgabe 5.4

$$\sup_{t\leq T_0} B_t^a = \sup_t B_{t\wedge T_0}^a \stackrel{d}{=} a/U \ ,$$

wobei U gleichverteilt auf $[0,1]$.
(ii): Da $B_t/t \to 0$ f.s. (s. Aufgabe 1.4), folgt $M_t = \exp(\mu t(B_t/t - \mu)) \to 0$ f.s.. Damit ist Aufgabe 5.4 anwendbar, und wir haben

$$\sup_t M_t \stackrel{d}{=} 1/U \ ,$$

mit $1/U$ gleichverteilt. Dann folgt

$$\sup_t \mu B_t - \mu^2/2t = \log(\sup_t M_t) \stackrel{d}{=} -\log(U) \ ,$$

also

$$\sup_t B_t - \mu/2t \stackrel{d}{=} -\mu \log(U) \ .$$

Aber das ist die Behauptung (Transformationssatz).

Aufgabe 3: Ist $(X, \mathfrak{F})$ ein Martingal, so gilt für $u \leq v < t \leq s$,

$$\mathbb{E}\,(X_t - X_s)(X_u - X_v) = 0 \ ,$$

sowie

$$\mathbb{E}\,(X_t - X_s)^2 = \mathbb{E}\,X_t^2 - \mathbb{E}\,X_s^2 \ .$$

Loesungsvorschlag:

$$\mathbb{E}\,[(X_t - X_s)(X_u - X_v)\,|\,\mathfrak{F}_s] = (X_u - X_v)\mathbb{E}\,[(X_t - X_s)\,|\,\mathfrak{F}_s] = 0 \ ,$$

$$\mathbb{E}\,[(X_t - X_s)^2\,|\,\mathfrak{F}_s] = \mathbb{E}\,[X_t^2\,|\,\mathfrak{F}_s] - 2X_s\mathbb{E}\,[X_t\,|\,\mathfrak{F}_s] + X_s^2 = \mathbb{E}\,[X_t^2\,|\,\mathfrak{F}_s] - X_s^2 \ .$$