TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2007
18.05.07

5. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

(!)Aufgabe 1:

(a) Formulieren und beweisen Sie Analoga der Sätze I.2.9 und I.2.11 für Martingale im zeitstetigen Fall.
Loesungsvorschlag: Satz I.2.9:

> Sei $(X_t, F_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges Martingal, und T eine f.s. endliche Stopzeit mit
> $$\lim_{N\to\infty} \int_{\{T>N\}} |X_N| d\mathbb{P} = 0 \ .$$
> Dann gilt
> $$\mathbb{E}\, X_T = \mathbb{E}\, X_0 \ .$$

Zum Beweis: Mit $T_N = T \wedge N$ hat man nach Satz I.2.14 $\mathbb{E}\, X_{T_N} = \mathbb{E}\, X_0$; weiter gilt

$$\int |X_{T_N} - X_T| \leq \int_{\{T>N\}} |X_{T_N}| + |X_T| \to 0 \ ,$$

und also $\mathbb{E}\, X_T = \lim_N \mathbb{E}\, X_{T_N} = \mathbb{E}\, X_0$.

Satz I.2.11 für den Martingalfall:

> Sei $(X_t, F_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges Martingal, und $S \leq T$ beschränkte Stopzeiten; dann gilt
> $$\mathbb{E}\,(X_T \mid \mathfrak{F}_S) = X_S \ .$$

Zum Beweis: Sei $A \in \mathfrak{F}_S$, bilde $R = \mathbb{1}_A T + \mathbb{1}_{A^C} S$, dann ist R beschränkte Stopzeit, und nach Satz I.2.14 hat man

$$\mathbb{E}\,\mathbb{1}_A X_T + \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{A^c} X_S = \mathbb{E}\,X_R = \mathbb{E}\,X_S = \mathbb{E}\,\mathbb{1}_A X_S + \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{A^c} X_S\ .$$

(b) Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ein Martingal mit rechtsseitig stetigen Pfaden und sei T eine Stoppzeit. Zeigen Sie, daß der gestoppte Prozeß $X^T = (X_{T\wedge t}, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ wieder ein Martingal ist. (*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, daß $(X_{t\wedge T}, \mathfrak{F}_{t\wedge T})$ ein Martingal ist, betrachten Sie dann $X_T \mathbb{1}_{T\le s}$ und $X_T \mathbb{1}_{T>s}$ separat.)

Aufgabe 2:

Es sei $B = (B_t)_{t\ge 0}$ eine Brownsche Bewegung, und setze, für $a > 0$,

$$T_a := \inf\{t > 0 \ :\ B_t = a\} = \inf\{t > 0 \ :\ B_t \ge a\}\ .$$

(a) Zeigen Sie, daß $T_a < \infty$ f.s.. (*Hinweis:* Man zeige $\overline{\lim}_n B_n = \infty$; das geht z.B. mit Kolmogorovs 0–1–Gesetz.) **Loesungsvorschlag:** Wenn $\overline{\lim}_n B_n = \infty$, so folgt sicher $T_a < \infty$. Weiter ist das Ereignis $\overline{\lim}_n B_n$ terminal bezüglich der σ–Algebren $\mathfrak{A}_n := \sigma(B_{n+1} - B_n)$; da diese unabhängig sind, folgt aus Kolmogorovs 0–1–Gesetz, daß $\mathbb{P}(\overline{\lim}_n B_n = \infty) \in \{0, 1\}$. Weiter folgt aus der Symmetrie (d.h., $-B$ ist auch eine Brownsche Bewegung), daß $\mathbb{P}(\overline{\lim}_n B_n = \infty) = \mathbb{P}(\underline{\lim}_n B_n = -\infty)$. Wären nun beide W.keiten 0, so wäre die Folge B_n f.s. beschränkt, und $1/\sqrt{n} B_n \to 0$ f.s.. Aber das ist absurd, denn $1/\sqrt{n} B_n$ ist eine Folge von Normalverteilungen.

(b) Begründen Sie das zweite Gleichheitszeichen. **Loesungsvorschlag:** B ist stetig.

(c) Zeigen Sie, daß $\mathbb{E}\,(B_{T_a}) = a$; widerspricht dies dem Optional Sampling Theorem? **Loesungsvorschlag:** Trivial und nein: Es wird wohl $\int_{T_a > t} |B_t| \not\to 0$ gelten.

(d) Zeigen Sie, daß für festes $s \ge 0$ der Prozeß $M_t := \exp(sB_t - s^2 t/2)$ ein Martingal ist mit $0 \le M_{t\wedge T_a} \le e^{sa}$. **Loesungsvorschlag:** Die letztere Ungleichung folgt unmittelbar durch Fallunterscheidung, die Martingaleigenschaft ist völlig analog zu Aufgabe 4.3.

(e) Zeigen Sie, daß für den bei T_n gestoppten Prozeß M^{T_n} und T_n die Voraussetzungen des (in Aufgabe 1 (a) aufgestellten) Optional Sampling Theorems erfüllt sind. Folgern Sie, daß

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\right] = \exp(-a\sqrt{2\lambda}), \qquad \lambda \geq 0 \ .$$

(Dies ist die LaPlace-Transformierte von T_a, die – analog zur charakteristischen Funktion – die Verteilung von T_a eindeutig festlegt. Insbesondere hat T_a eine Dichte, die per inverser LaPlace-Transformation bestimmt werden kann.) **Loesungsvorschlag:** T_a ist f.s. endlich, und

$$\int_{T_a > N} |M_{t\wedge T_a}| d\mathbb{P} \leq \int_{T_a > N} e^{sa} d\mathbb{P} \to 0 \ .$$

Also folgt

$$1 = M_0 = \mathbb{E}\,(M_{T_a}^{T_a}) = \mathbb{E}\,(M_{T_a}) = \mathbb{E}\, e^{sa - s^2/2 T_a} \ .$$

Umstelle und Einsetzen von $\lambda = s^2/2$ liefert

$$\mathbb{E}\, e^{-\lambda T_a} = e^{-\sqrt{2\lambda} a} \ .$$

(*)Aufgabe 3:

Es sei M ein positives stetiges Martingal auf $[0, \infty[$, sodaß

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \lim_{t\to\infty} M_t(\omega) = 0 \ .$$

Sei $M^*(\omega) := \sup_t M_t(\omega)$.

(a) Zeigen Sie, daß M^* eine Zufallsgröße ist.

Lösungsvorschlag:

$$M^* = \sup_{t\geq 0, t\in\mathbb{Q}} M_t$$

wegen der Stetigkeit von M.

(b) Weisen Sie nach, daß für $x > 0$ gilt:

$$P(M^* \geq x \,|\, \mathfrak{F}_0) = 1 \wedge (M_0/x) \ .$$

(c) Verallgemeinern Sie (b) zu folgendem: Für jede positive $\mathfrak{F}_0$–meßbare Zufallsgröße X ist

$$P(M^* \geq X \,|\, \mathfrak{F}_0) = 1 \wedge (M_0/X) \ .$$

Lösungsvorschlag: Wir beweisen gleich (c) und definieren

$$T_X := \inf\{t \geq 0 \;\; M_t \geq X\} = \inf\{t \geq 0 \;:\; M_t/X \geq 1\} \ .$$

Da X $\mathfrak{F}_0$–meßbar, ist dies eine Stopzeit und M_t/X ein $\mathfrak{F}$–Martingal. Wir setzen $M_\infty = 0$ in Übereinstimmung mit der Voraussetzung $M_t(\omega) \to 0$ für alle ω. Dann ist

$$\mathbb{1}_{\{M^* \geq X\}} = \mathbb{1}_{\{M_0 \geq X\}} + \mathbb{1}_{\{M_0 < X\}} \cdot M_{T_X}/X \ ,$$

wie man leicht nachrechnet. Wäre T_X eine beschränkte Stopzeit, so würde nun mit dem optional sampling theorem

$$\mathbb{E}\,(M_{T_X}/X \,|\, \mathfrak{F}_0) = M_0/X \tag{1}$$

folgen, und damit rechnet man sofort nach, daß

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{M^* \geq X\}} \,|\, \mathfrak{F}_0) = \mathbb{E}\,[\mathbb{1}_{\{M_0 \geq X\}} + \mathbb{1}_{\{M_0 < X\}} \cdot M_0/X \,|\, \mathfrak{F}_0] = 1 \wedge (M_0/X) \ .$$

Dummerweise dürfte T_X eher unbeschränkt sein. Daher definieren wir $T_X^N := T_X \wedge N$; T_X^N ist eine beschränkte Stopzeit. Wir haben wegen $M_t \to 0$, daß $M_{T_X^N} \to M_{T_X}$ fast sicher; da $|M_{T_X^N}| + |M_{T_X}| \leq 2\max\{M_0, X\}$, folgt mit Lebesgue sogar

$$\mathbb{E}\,|M_{T_X^N} - M_{T_X}| \to 0 \ ,$$

d.h. $M_{T_X^N} \to M_{T_X}$ in L_1. Nun sind bedingte Erwartungswerte stetige Abblidungen von L_1 nach L_1 (z.B. Prob.Th.06/07, Lemma V.I.1) und also folgt $\mathbb{E}\,[M_{T_X^N} \,|\, \mathfrak{F}_0] \to \mathbb{E}\,[M_{T_X} \,|\, \mathfrak{F}_0]$ in L_1. Damit existiert eine f.s. konvergente Teilfolge,

$$\mathbb{E}\,(M_{T^X} \,|\, \mathfrak{F}_0) = \lim_{m \to \infty} \mathbb{E}\,(M_{T^X_{N_m}} \,|\, \mathfrak{F}_0) = M_0 \ ;$$

weil X $\mathfrak{F}_0$–meßbar ist, ist $\mathbb{E}\,(M_{T^X}/X \,|\, \mathfrak{F}_0) = M_0/X$. Nun haben wir glücklich (1) gezeigt, und aus der dort folgenden Rechnung folgt die Behauptung.

(d) Folgern Sie aus (c), daß $M^* \stackrel{d}{=} M_0/U$ mit U einer von M_0 unabhängigen, auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

Lösungsvorschlag: Wir setzen $X = \lambda M_0$ und erhalten

$$\mathbb{P}(M^*/M_0 \geq \lambda \,|\, \mathfrak{F}_0) = 1 \wedge (1/\lambda) \; .$$

Wir bilden Erwartungswerte und erhalten

$$\mathbb{P}(M^*/M_0 \geq \lambda) = 1 \wedge (1/\lambda) \; .$$

Damit ist $M^*/M_0 \stackrel{d}{=} 1/U$ mit U gleichverteilt auf $[0,1]$. Wir wählen U unabhängig von M^*, M_0; nun behaupten wir, daß sogar $\mathfrak{F}_0$ und M^*/M_0 unabhängig sind. Sobald wir das gezeigt haben, folgt die Behauptung[1] Sei hierzu $A \in \mathfrak{F}_0$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap \{M^*/M_0 \geq \lambda\}) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{M^*/M_0 \geq \lambda} \,|\, \mathfrak{F}_0\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{P}(M^*/M_0 \geq \lambda \,|\, \mathfrak{F}_0)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \cdot (1 \wedge (1/\lambda))\right] \\
&= \mathbb{P}(A) \cdot (1 \wedge 1/\lambda) \\
&= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(M^*/M_0 \geq \lambda) \; .
\end{aligned}$$

[1] Allgemein gilt: Sind ξ, η, γ unabhängige Zufallsvariablen mit $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, so folgt $\xi \cdot \gamma \stackrel{d}{=} \eta \cdot \gamma$. Anwendung auf M^*/M_0, $1/U$ und M_0.