TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2007
11.05.07

**4. Aufgabenblatt zur Vorlesung
„Stochastische Analysis“**

Aufgabe 1: Es sei $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und ξ eine Zufallsgröße von $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß der Prozeß

$$X_t := \mathbb{E}\left(\xi \mid \mathfrak{F}_t\right)$$

ein $\mathfrak{F}$–Martingal ist.

Aufgabe 2: Betrachten Sie einen Poisson-Prozeß $(Z_t)_{t\in I}$ mit Intensität $\lambda > 0$.

(a) Sei $\mu > 0$; ist der Prozeß $Z_t - \mu t$ ein Sub-/Super/Martingal?

(b) Zeigen Sie, daß mit $M_t = Z_t - \lambda t$ der Prozeß $M_t^2 - \lambda t$ ein Martingal ist.

(!)Aufgabe 3: Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit kanonischer Filtration $\mathfrak{F}$. Bestimmen Sie (deterministische) Funktionen $\phi(t)$ und $\psi(t)$, sodaß die Prozesse $B_t^2 - \phi(t)$ und $\exp(B_t - \psi(t))$ $\mathfrak{F}$–Martingale sind.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst mit Hilfe der Zerlegung $B_t = (B_t - B_s) + B_s$ die bedingten Erwartungswerte von B_t^2 bzw. $\exp(B_t)$ bezüglich $\mathfrak{F}_s$.

(*)Aufgabe 4: Sei $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ ein Poisson-Prozeß mit Intensität $\lambda > 0$. Zeigen Sie, daß fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \lambda$$

gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie zunächst $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.