TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2007
11.05.07

4. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

Aufgabe 1: Es sei $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und ξ eine Zufallsgröße von $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß der Prozeß

$$X_t := \mathbb{E}\left(\xi \mid \mathfrak{F}_t\right)$$

ein $\mathfrak{F}$–Martingal ist. **Lösungsvorschlag:** Nach dem Towering Lemma haben wir für $s \leq t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathfrak{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi \mid \mathfrak{F}_t\right]\mathfrak{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\xi \mid \mathfrak{F}_s\right] \\ &= X_s \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie einen Poisson-Prozeß $(Z_t)_{t\in I}$ mit Intensität $\lambda > 0$.

(a) Sei $\mu > 0$; ist der Prozeß $Z_t - \mu t$ ein Sub-/Super/Martingal?

(b) Zeigen Sie, daß mit $M_t = Z_t - \lambda t$ der Prozeß $M_t^2 - \lambda t$ ein Martingal ist.

Lösungsvorschlag: Ad (a):

$$\mathbb{E}\left(Z_t - \mu t \mid \mathfrak{F}_s\right) = Z_s + \mathbb{E}\left(Z_t - Z_s\right) - \mu t = Z_s + \lambda(t-s) - \mu t \ .$$

Daher ist der Prozeß ein Submartingal genau dann, wenn $\mu \leq \lambda$, und ein Supermartingal genau dann, wenn $\mu \geq \lambda$.

Ad (b): Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
E((X_t - \lambda t)^2|\mathfrak{F}_s) &= E([(X_t - X_s) + (X_s - \lambda t)]^2|\mathfrak{F}_s) \\
&= E((X_t - X_s)^2|\mathfrak{F}_s) + E((X_s - \lambda t)^2|\mathfrak{F}_s) \\
&\quad +2E((X_t - X_s)(X_s - \lambda t)|\mathfrak{F}_s) \\
&= E((X_t - X_s)^2) + (X_s - \lambda t)^2 + 2(X_s - \lambda t)E(X_t - X_s) \\
&= (\lambda(t-s) + \lambda^2(t-s)^2) + X_s^2 - 2\lambda t X_s \\
&\quad +\lambda^2 t^2 + 2X_s(\lambda(t-s)) - 2\lambda^2 t^2 + 2\lambda^2 ts \\
&= \lambda(t-s) + \lambda^2 s^2 + X_s^2 - 2\lambda s X_s \\
&= (X_s - \lambda s)^2 + \lambda(t-s)\ .
\end{aligned}$$

Nun zieht man noch auf beiden Seiten λt ab und erhält die Behauptung.

(!)Aufgabe 3: Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit kanonischer Filtration $\mathfrak{F}$. Bestimmen Sie (deterministische) Funktionen $\phi(t)$ und $\psi(t)$, sodaß die Prozesse $B_t^2 - \phi(t)$ und $\exp(B_t - \psi(t))$ $\mathfrak{F}$–Martingale sind.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst mit Hilfe der Zerlegung $B_t = (B_t - B_s) + B_s$ die bedingten Erwartungswerte von B_t^2 bzw. $\exp(B_t)$ bezüglich $\mathfrak{F}_t$.

(*)Aufgabe 4: Sei $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ ein Poisson-Prozeß mit Intensität $\lambda > 0$. Zeigen Sie, daß fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \lambda$$

gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie zunächst $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösungsvorschlag: X Poisson-Prozess. Dann ergibt sich $X_n = \sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dabei sind $X_i - X_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$ nach Definition unabhängige und identisch Poisson(λ)-verteilte Zufallsvariablen.

Aus $X_{\lfloor t\rfloor} \leq X_t \leq X_{\lceil t\rceil}$ folgt

$$\frac{\lfloor t\rfloor}{t} \cdot \frac{X_{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor} \leq \frac{X_t}{t} \leq \frac{X_{\lceil t\rceil}}{\lceil t\rceil} \cdot \frac{\lceil t\rceil}{t}$$

Nach dem Starken Gesetz der großen Zahlen konvergiert $X_{\lfloor t\rfloor}/\lfloor t\rfloor$ bzw. $X_{\lceil t\rceil}/\lceil t\rceil$ $P-f.s.$ gegen λ für $t\to\infty$. Da $\lfloor t\rfloor/t$ und $\lceil t\rceil/t$ gegen 1 konvergieren für $t\to\infty$, konvergiert somit X_t/t gegen λ für $t\to\infty$.