TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2007
04.05.07

3. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis"

Aufgabe 1: Gegeben sei eine Filtration $\mathfrak{F}$ auf Ω. Zeigen Sie: Eine Abbildung $T : \Omega \to [0, \infty]$ ist eine Stopzeit zu $\mathfrak{F}$ genau dann, wenn

$$X_t(\omega) := \mathbb{1}_{T(\omega \leq t)} = \begin{cases} 0 & t < T(\omega)\ , \\ 1 & t \geq T(\omega)\ , \end{cases}$$

ein $\mathfrak{F}$–adaptierter Prozeß ist. Folgern Sie, daß jede Stopzeit als Debútzeit eines passenden $\mathfrak{F}$–adaptierten Prozesses in die Menge $\Gamma = \{1\}$ geschrieben werden kann.

(!)Aufgabe 2: Betrachten Sie zwei Stoppzeiten S und T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$.

(a) Zeigen Sie
$$\mathfrak{F}_S \subset \mathfrak{F}_T,$$
falls $S(\omega) \leq T(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

(b) Zeigen Sie, daß $S \wedge T = \min\{S, T\}$ eine Stoppzeit ist und
$$\mathfrak{F}_{S \wedge T} = \mathfrak{F}_S \cap \mathfrak{F}_T$$
gilt.

(*)Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß die kanonische Filtration des Poisson–Prozesses rechtsstetig ist.