TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2007
27.04.07

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung
„Stochastische Analysis“

Aufgabe 1: Wir betrachten den folgenden stochastischen Prozeß auf $[0,\infty[$: Es sei $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Bernoullifolge (also i.i.d. mit $\mathbb{P}(\varepsilon_i = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$). Für $t \in [n, n+1[$ setzen wir

$$X_t := \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\varepsilon_i \ .$$

1. Zeigen Sie, daß f.s. $\lim_{t\to\infty} X_t$ existiert, und berechnen Sie die Verteilung des Grenzwertes.

2. Bestimmen Sie die kanonische Filtration $\mathfrak{F}_t^X$.

3. Prüfen Sie, welche der folgenden Prozesse adaptiert sind bezüglich $\mathfrak{F}_t^X$:

   (a) $\tilde{X}_t := \sum_{i=1}^n 2^{-1}\tilde{\varepsilon_i}$ für $t \in [n, n+1[$, mit $\tilde{\varepsilon_i}$ einer von ε_i unabhängigen Bernoullifolge.

   (b) $\bar{X}_t = \sum_{i=1}^n 2^{-i}\varepsilon_i$ für $t \in [n/2, (n+1)/2[$.

   (c) $\hat{X}_t = \sum_{i=1}^n 2^{-i}\varepsilon_i$ für $t \in [2n, 2n+1[$, $X_t = 0$ sonst.

   (d) $\check{X}_t = \prod_{i=1}^n \exp\{(\log[1+\pi_i])^{2+\varepsilon_i}\}$ für $t \in [n, n+1[$ mit π_i als i–ter Stelle der 27–adischen Entwicklung von π.

   (e) $\check{X}_t = \sum_{i=1}^n 2^{-i}\xi_i$ für $t \in [n, n+1[$ mit $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ einer i.i.d. standardnormalverteilten Folge.

(!)Aufgabe 2:

1. Es seien X, Y stochastische Prozesse auf $[0,\infty[$; beide Prozesse mögen rechtsstetige Pfade haben.
   Zeigen Sie: Y ist eine Modifikation von $X \Leftrightarrow X$, Y ununterscheidbar.

2. Geben Sie ein Beispiel für zwei Prozesse X,Y auf $[0,1]$ an, welche die gleiche Verteilung im Pfadraum haben, aber keine Modifikationen sind.

(*)Aufgabe 3: Es sei $(\xi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ eine Familie von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\xi_0 = c) < 1$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß der stochastische Prozeß $X_t := \xi_t$ mit Wahrscheinlichkeit 1 in keinem Punkt $t \in \mathbb{R}$ stetig ist.
Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe des Borel–Cantelli–Lemmas: Für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ und jedes $\delta > 0$ gilt P–f.s., daß

$$\sup_{t,s\in[k\delta,(k+1)\delta[} |X_t - X_s| > \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 4: Nutzen Sie Simulationen der Brownschen Bewegung $B = (B_t)_{t\geq 0}$, um folgende Grössen statistisch zu untersuchen:

(a) $T_0 := \inf\{t \geq 0 \ : \ B_t > 0\}$.

(b) $T_1 := \inf\{t \geq 0 \ : \ B_t > 1\}$.

(c) $\hat{T}_1 := \inf\{t \geq 0 \ : \ |B_t| > 1\}$.

(d) $B_1^* := \max_{t\leq 1} B_t$.

(e) $S_1 := \frac{B_1}{\max_{t\leq 1} B_t - \min_{t\leq 1} B_t}$.