TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2004
27.04.04

**2. Aufgabenblatt zur Vorlesung
„Stochastische Analysis“**

Aufgabe 1:

Betrachten Sie $(\Omega, \mathfrak{A}, P) = ([0,1), \mathfrak{B}([0,1)), \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Für $\omega \in [0,1]$ sei

$$X(\omega) = 2\omega^2, \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \text{falls } \omega < 1/2, \\ 2\omega - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $E(X \mid Y)$ und $E(X \mid Y = y)$ für $y \in [0,1]$.

Lösungsvorschlag: Zunächst berechnen wir $\sigma(Y)$. Offenbar sind die Urbilder von Intervalles $[a,b]$ unter Y von der Form $[a_1, b_1] \cup [a_1 + 1/2, b_1 + 1/2]$; deshalb hat man

$$\sigma(Y) = \{A_1 \cup (A_1 + 1/2) \ : \ A_1 \in \mathfrak{B}([0,1/2))\} .$$

Eine Zufallsgröße Z ist nun $\sigma(Y)$–meßbar genau dann, wenn $Z(\omega) = Z(\omega + 1/2)$ für alle $\omega < 1$ gilt. Für einen bedingten Erwartungswert Z muß also gelten:

$$\int_{A_1 \cup A_1 + 1/2} X \, \mathrm{d}\lambda = 2 \int_{A_1} Z \mathrm{d}\lambda ,$$

also

$$\int_{A_1} 2\omega^2 + 2(\omega + 1/2)^2 \mathrm{d}\omega = 2 \int_{A_1} Z \mathrm{d}\lambda .$$

Diese Bedingungen erfüllt die Funktion

$$Z(\omega) := \begin{cases} \omega^2 + (\omega + 1/2)^2, & \omega < 1/2 , \\ (\omega - 1/2)^2 + \omega^2, & \omega \geq 1/2 . \end{cases}$$

Also ist $E(X \mid Y) = Z$. Dies ist auch leicht über Y zu faktorisieren: $E(X \mid Y = y) = y^2 + (y + 1/2)^2$.

Aufgabe 2:

(a) Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum mit $E(|X|) < \infty$ und es sei $X \stackrel{d}{=} \lambda Y$ für eine Zahl $\lambda \neq -1$. Bestimmen Sie $E(X \mid X+Y)$.
Hinweis: Suchen Sie direkt nach der Faktorisierung.

Lösungsvorschlag: Wir suchen ein meßbares g, sodaß für alle $\sigma(X+Y)$–meßbaren Teilmengen A erf¨ullt:

$$\int_A g(X+Y)\mathrm{d}P = \int_A X\mathrm{d}P \ .$$

Setzt man $g = \mathrm{id}$, so erhält man

$$\int_A (X+Y)\mathrm{d}P = (1+\lambda)\int_A X\mathrm{d}P \ ;$$

folglich ist $g(z) := z/(1+\lambda)$ passend, und also

$$E(X \mid X+Y) = (X+Y)/(1+\lambda) \ .$$

(b) Betrachten Sie eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von iid. Zufallsvariablen. Bestimmen Sie

$$E(X_1 \mid \sigma(\{S_n\})),$$

wobei $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

Lösungsvorschlag: Analog zum Teil (b) erhält man hier leicht, daß

$$\int_A S_n = n \cdot \int_A X \ ,$$

also ist S_n/n eine Version des bedingten Erwartungswertes.

Aufgabe 3: Gegeben sei eine Filtration $\mathfrak{F}$ auf Ω. Zeigen Sie: Eine Abbildung $T : \Omega \to [0,\infty]$ ist eine Stopzeit zu $\mathfrak{F}$ genau dann, wenn

$$X_t(\omega) := \mathbb{1}_{T(\omega \leq t)} = \begin{cases} 0 & t < T(\omega) \ , \\ 1 & t \geq T(\omega) \ , \end{cases}$$

ein $\mathfrak{F}$–adaptierter Prozeß ist. Folgern Sie, daß jede Stopzeit als Debútzeit eines passenden $\mathfrak{F}$–adaptierten Prozesses in die Menge $\Gamma = \{1\}$ geschrieben werden kann.

Lösungsvorschlag: Offenbar ist

$$\sigma(X_t) = \{\{\omega : T(\omega) \leq t\}, \{\omega : T(\omega) > t\}, \emptyset, \Omega\} \ .$$

Daher ist $\sigma(X_t) \subseteq \mathfrak{F}_t Leftrightarrow \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$, und daraus folgt die erste Behauptung. Und natürlich ist $T = H_\Gamma$ für den Prozeß X, was die zweite Behauptung liefert.

Aufgabe 4: Betrachten Sie zwei Stoppzeiten S und T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$.

(a) Zeigen Sie

$$\mathfrak{F}_S \subset \mathfrak{F}_T,$$

falls $S(\omega) \leq T(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

Lösungsvorschlag: Wegen der Voraussetzung ist $\{T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}$. Ist also $A \in \mathfrak{A}$, sodaß für alle $t \geq 0$ gilt: $A \cap \{S \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$, so folgt

$$A \cap \{T \leq t\} = \underbrace{A \cap \{S \leq t\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \cap \underbrace{T \leq t}_{\in \mathfrak{F}_t} \in \mathfrak{F}_t \ .$$

(b) Zeigen Sie, daß $S \wedge T = \min\{S, T\}$ eine Stoppzeit ist und

$$\mathfrak{F}_{S\wedge T} = \mathfrak{F}_S \cap \mathfrak{F}_T$$

gilt.

Lösungsvorschlag: Offenbar ist mit $\{T \leq t\}$ und $\{S \leq t\}$ auch deren Vereinigung in $\mathfrak{F}_t$; dies ist aber gerade die Menge $\{S \wedge T \leq t\}$. Genauso sieht man sofort, daß

$$A \cap \{T \wedge S \leq t\} = (A \cap \{T \leq t\}) \cap (A \cap \{S \leq t\}) \ ,$$

und daraus folgt leicht, daß $\mathfrak{F}_T \cap \mathfrak{F}_S \subseteq \mathfrak{F}_{T\wedge S}$. Für die umgekehrte Richtung bemerken wir, daß $\{T > t\} \in \mathfrak{F}_t$; ist daher $A \cap \{T \wedge S \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$, so auch

$$A \cap \{T \wedge S \leq t\} \cap \{T > t\} = A \cap \{S \leq t\} \ ,$$

und analog für T.

Aufgabe 5: Für $X \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ zeige man:

(a) Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall\ A \in \mathfrak{A} : P(A) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \int_A |X|\, dP \leq \varepsilon.$$

Lösungsvorschlag: Da $E(|X|) = \int_0^\infty P(|X| > t)\mathrm{d}t < \infty$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein t_0, sodaß $E\mathbb{1}_{X>t_0}X = \int_{t_0}^\infty P(|X| > t)\mathrm{d}t < \varepsilon/2$. Wähle nun $\delta = \varepsilon/(2t_0)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_A |X|\mathrm{d}P &= \int_{A\cap\{X\leq t_0\}} |X| + \int_{A\cap\{|X_0|>t_0\}} |X| \\ &\leq t_0 P(A) + \int_{|X_0|>t_0} |X| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .\end{aligned}$$

(b) Die Menge

$$\{E(X \mid \mathfrak{B}) : \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra}\}$$

ist gleichgradig integrierbar.

Lösungsvorschlag: $\mathcal{M} = \{E(X|\mathfrak{B}) : \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} \quad \sigma\text{-Algebra}\}$ ist gleichgradig integrierbar, bedeutet nach Definition

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{\xi\in\mathcal{M}} \int_{\{|\xi|>\alpha\}} |\xi| dP = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach der Jensenschen Ungleichung und der Definition der bedingten Erwartung gilt

$$\int_{\{|E(X|\mathfrak{B})|>\alpha\}} |E(X \mid \mathfrak{B})| dP \leq \int_{\{E(|X||\mathfrak{B})>\alpha\}} E(|X| \mid \mathfrak{B}) dP = \int_{\{E(|X||\mathfrak{B})>\alpha\}} |X| dP.$$

Mit der Chebyshev-Markov-Ungleichung erhält man

$$P(E(|X| \mid \mathfrak{B}) > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(E(|X| \mid \mathfrak{B})) = \frac{1}{\alpha} E|X|.$$

Somit gilt

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad \sup_{\{\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}:\ \mathfrak{B}\ \ \sigma\text{-Algebra}\}} P(E(|X| \mid \mathfrak{B}) > \alpha) < \delta.$$

Wähle für das vorgegebene $\varepsilon > 0$ jetzt $\delta > 0$ nach a) geeignet.