TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2007
20.04.07

1. Aufgabenblatt zur Vorlesung "'Stochastische Analysis"'

Aufgabe 1: Normalverteilungen im $\mathbb{R}^d$: Eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{R}^d$ heißt *normalverteilt* genau dann, wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^d$ die Zufallsgröße $\langle X, \lambda \rangle$ normalverteilt ist.

(a) Zeigen Sie: Falls für beliebige Zufallsvariablen X, Y gilt: $\langle X, \lambda \rangle \overset{d}{=} \langle Y, \lambda \rangle$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^d$, so folgt $X \overset{d}{=} Y$.
Hinweis: Charakteristische Funktionen.

(b) Folgern Sie aus (a): Sind $X = (X_i)_{i \le d}, Y = (Y_i)_{i \le d}$ normalverteilt, und gilt

(i) $\mathbb{E}\, X_i = \mathbb{E}\, Y_i$ für alle $i \le d$,

(ii) $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ für alle $i, j \le d$,

so folgt bereits $X \overset{d}{=} Y$. Die beiden gemeine Verteilung bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(a, C)$, wobei $a = (\mathbb{E}\, X_i)_{i \le d}$, $C = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j \le d}$.

(c) Es sei X $\mathcal{N}(a, C)$–verteilt, und $Y == AX + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{d \times d}, b \in \mathbb{R}^d$. Bestimmen Sie die Verteilung von Y.

(d) Zeigen Sie, daß die Kovarianzmatrix C einer $\mathcal{N}(0, C)$–verteilten Zufallsvariablen stets symmetrisch und positiv semidefinit ist. Beweisen Sie umgekehrt, daß zu jeder positiv semidefiniten Matrix C eine $\mathcal{N}(0, C)$–verteilte Zufallsgröße existiert.
Hinweis: Benutzen Sie: Jede positiv semidefinite Matrix C zerfällt in ein Produkt $C = A^T A$, mit passendem $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

Aufgabe 2!: Gaußprozesse: Ein reellwertiger stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ heißt *Gaußprozeß*, falls alle endlichdimensionalen Verteilungen von X normalverteilt sind. X heißt *zentriert*, falls zusätzlich $\mathbb{E}\, X_t = 0$ für alle $t \in I$.

(a) Zeigen Sie: Zwei zentrierte Gaußprozesse X, Y mit gleicher Kovarianzfunktion $C(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ haben die gleiche Verteilung.

(b) Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, daß dann $C(s,t) = t \wedge s := \min\{s,t\}$.

(c) Beweisen Sie umgekehrt: Ein zentrierter Gaußprozeß X auf $[0,\infty[$ mit stetigen Pfaden ist eine Brownsche Bewegung, wenn $C(s,t) = \min\{t,s\}$.
Hinweis: Zeigen Sie, daß die Zuwächse $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ unabhängig sind, und folgern Sie daraus, daß $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}})$ und X_{t_n} unabhängig sind.

(d) Nutzen Sie (b), um zu zeigen: Ist B eine Brownsche Bewegung, und $t > 0$ fest, so ist der Prozeß

$$\tilde{B}_s := B_{t+s} - B_s, \qquad s \in [0,\infty[\ ,$$

eine Brownsche Bewegung. Paßt dies zu unserer anschaulichen Motivation der BB?

Aufgabe 3: Brownsche Brücken und Bewegungen: Eine Brownsche Brücke ist ein zentrierter Gaußprozeß X auf $[0,1]$ mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion $C(s,t) = \min\{t,s\} - t \cdot s$.

(a) Zeigen Sie, daß notwendigerweise $X(0) = X(1) = 0$ f.s..

(b) Falls X eine Brownsche Brücke ist, so beweise man, daß $\tilde{X}_t := X_{1-t}$ ebenfalls eine Brownsche Brücke ist.

(c) Es sei B eine Brownsche Bewegung; zeigen Sie, daß der Prozeß

$$X_t := B_t - t \cdot B_1 \qquad t \in [0,1]$$

eine Brownsche Brücke ist. Zeigen Sie weiter, daß B_1 unabhängig von $\sigma(X_s\ :\ s \in [0,1])$, ist. (Das ist analog zu (c) in Aufgabe 2.)

(d) Ist umgekehrt X eine Brownsche Brücke und ξ standardnormalverteilt und unabhängig von X, so ist der Prozeß

$$B_t := X_t + t \cdot \xi, \qquad t \in [0,1],$$

eine Brownsche Bewegung auf $[0,1]$. [Verdeutlichen Sie sich die Ergebnisse von (c),(d) anhand einer Skizze.]

(e*) Nutzen Sie (b)–(d) um ein zu (b) analoges Ergebnis für die Brownsche Bewegung zu erhalten.

Aufgabe 4(*) – Noch mehr Spaß mit der Brownschen Bewegung

(a) Man zeige: Sind X, Y zwei reellwertige stochastische Prozesse auf $[0, \infty[$ mit der gleichen Verteilung im Pfadraum, so ist die Menge

$$\Big\{\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{Q}}} X_t = 0\Big\} = \Big\{\omega \in \Omega \;:\; \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{Q}}} X_t(\omega) = 0\Big\}$$

meßbar, und

$$\mathbb{P}\left(\Big\{\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{Q}}} X_t = 0\Big\}\right) = \mathbb{P}\left(\Big\{\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{Q}}} Y_t = 0\Big\}\right) .$$

(b) Es sei nun $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Wir setzen

$$Y_t := t \cdot B_{1/t} , \qquad t > 0 ,$$

und $Y_0 = 0$. Zeigen Sie, daß $Y \overset{d}{=} B$; folgern Sie weiter aus (a), daß eine Version von Y mit stetigen Pfaden existiert; somit ist eine passende Version von Y wiederum eine Brownsche Bewegung.

(c) Folgern Sie aus (b), daß $\lim_{t\to\infty} B_t/t \to 0$ $\mathbb{P}$–f.s..