TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2004
20.04.04

Musterlösung zum 1. Aufgabenblatt „Stochastische Analysis“

Gruppenaufgabe: Wir betrachten den folgenden stochastischen Prozeß auf $[0,\infty[$: Es sei $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Bernoullifolge (also i.i.d. mit $\mathbb{P}(\varepsilon_i = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2$). Für $t \in [n, n+1[$ setzen wir

$$X_t := \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\varepsilon_i \ .$$

1. Skizzieren Sie eine ‚typische' Trajektorie von X, und untersuchen Sie den Prozeß auf Stetigkeitseigenschaften. Was hat $\lim_{t\to\infty} X_t$ für eine Verteilung?

   Lösungsvorschlag: X ist ein cadlag–Prozeß, ist aber nicht linksstetig. Sei $t > 0$, $t \in [n, n+1[$. Weil für $s > t$ gilt:

   $$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i}|\varepsilon_i(\omega)| = 2^{-n} \le 2^{-t+1} \ ,$$

   ist $X_t(\omega)$ P–f.s. konvergent. Weiter ist die Verteilung von $\lim_{t\to\infty} X_t$ die Gleichverteilung auf $[-1, 1]$; um dies zu sehen, betrachten wir $Y = (X+1)/2$:

   $$(X_t + 1)/2 = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}(1+\varepsilon_i)/2 \ .$$

   Nun ist für ein dyadisches Intervall $]k/2^n, (k+1)/2^n]$ mit $0 \le k \le 2^n$ leicht nachzurechnen, daß

   $$\lim_{t\to\infty} Y_t \in \,]k/2^n, (k+1)/2^n] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}(1+\varepsilon_i)/2 \in \,]k/2^n, (k+1)/2^n]$$

   und damit folgt sofort, daß $P(\lim_t Y_t \in \,]k/2^n, (k+1)/2^n]) = 1/2^n$; weiter ist $P(\lim Y_t = 0) = P(\varepsilon_i = 0 \text{ immer}) = 0$ (Borel–Cantelli). Folglich stimmt die Verteilung von $\lim_t Y_t$ auf der Menge der dyadischen Intervalle mit der Gleichverteilung überein, und damit auch auf $\mathfrak{B}([0,1])$ (schnittstabiles Erzeugendensystem).

2. Bestimmen Sie die kanonische Filtration $\mathfrak{F}_t^X$.
Lösungsvorschlag: Für $t \in [n, n+1[$ ist $\mathfrak{F}_t^X = \sigma(\{\varepsilon_i : i \leq n\})$. Denn einerseits ist X_t eine meßbare Funktion der ε_i, andererseits ist $X_t - X_{t-1} = 2^{-n}\varepsilon_n$.

3. Prüfen Sie, welche der folgenden Prozesse adaptiert sind bezüglich $\mathfrak{F}_t^X$:

   (a) $\bar{X}_t = \sum_{i=1}^n 2^{-i}\varepsilon_i$ für $t \in [n/2, (n+1)/2[$.
   Lösungsvorschlag: Nicht adaptiert, die Filtration wächst zu schnell.

   (b) $\hat{X}_t = \sum_{i=1}^n 2^{-i}\varepsilon_i$ für $t \in [2n, 2n+1[$, $X_t = 0$ sonst.
   Lösungsvorschlag: Adaptiert.

   (c) $\check{X}_t = \sum_{i=1}^n 2^{-i}\xi_i$ für $t \in [n, n+1[$ mit $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ einer i.i.d. standardnormalverteilten Folge.

   Lösungsvorschlag: Nicht adaptiert; die σ–algebren von $\check{X}_t$ sind offenbar überabzählbar, nicht endlich wie für X_t.

   (d) $\breve{X}_t = \prod_{i=1}^n \exp\{(\log(1+\pi_i)^{2+\varepsilon_i}\}$ für $t \in [n, n+1[$ mit π_i als i–ter Stelle der 27–adischen Entwicklung von π.

   Lösungsvorschlag: Adaptiert; X_t hängt meßbar von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ab.

   (e) $\tilde{X}_t := \sum_{i=1}^n 2^{-i}\tilde{\varepsilon_i}$ für $t \in [n, n+1[$, mit $\tilde{\varepsilon_i}$ einer von ε_i unabhängigen Bernoullifolge.

   Lösungsvorschlag: Nicht adaptiert, z.B. ist $\sigma(\tilde{\varepsilon}_1) \not\subseteq \sigma(\varepsilon_1)$. Denn diese σ–Algebren sind nach Voraussetzung unabhängig, und der Schnitt zweier unabhängiger σ–Algebren besteht stets nur aus Mengen des Maßes 0 oder 1 (da diese Mengen ja von sich selbst unabhängig sein müssen).

Aufgabe 1:

1. Es seien X, Y stochastische Prozesse auf $[0, \infty)$; beide Prozesse mögen rechtsstetige Pfade haben.
   Zeigen Sie: Y ist eine Modifikation von $X \Leftrightarrow X$, Y ununterscheidbar.

   Lösungsvorschlag: " $\Leftarrow$ " ist trivial, " $\Rightarrow$ " : Es sei $D \subseteq T$ eine abzählbare, dichte Teilmenge. Wegen der Rechtsstetigkeit von $X - Y$ gilt: $X_t - Y_t = 0$ für alle $t \in T \Leftrightarrow X_t - Y_t = 0$ für alle $t \in D$. Nun ist aber

   $$\mathbb{P}(X_t - Y_t = 0 \quad \forall t \in D) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{t \in D} \{X_t - Y_t = 0\}\Big) = 1 ,$$

   und also auch $\mathbb{P}(X_t - Y_t = 0 \quad \forall t \in T) = 1$ (man beachte, daß hier das Ereignis "$X_t - Y_t = 0 \quad \forall t \in T$" sogar meßbar ist).

2. Geben Sie ein Beispiel für zwei Prozesse X,Y auf $[0, 1]$ an, welche zwar Modifikationen voneinander sind, aber nicht unterscheidbar.

   Lösungsvorschlag: Sei τ eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsgröße, und setze $X_t = 0$, und

   $$Y_t = \begin{cases} 1, & t = \tau, \\ 0 & t \neq \tau \ . \end{cases}$$

   Dann ist für jedes feste t offenbar $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = \mathbb{P}(\tau \neq t) = 1$; andererseits gibt es für jedes ω ein $t(\omega) = \tau(\omega)$, an welchem $Y_{t(\omega)}(\omega) = 1$ ist; also folgt sogar sicher, daß $X_t \neq Y_t$ für ein $t \in T$.

Aufgabe 2: Es sei $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Familie von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\xi_0 = c) < 1$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß der stochastische Prozeß $X_t := \xi_t$ P–f.s. in keinem Punkt $t \in \mathbb{R}$ stetig ist.
Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe des Borel–Cantelli–Lemmas: Es gibt $\varepsilon_0 > 0$, sodaß für jedes $\delta > 0$ P–f.s. gilt:

$$\sup_{t,s \in [k\delta, (k+1)\delta[} |X_t - X_s| > \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Lösungsvorschlag: Sei $\varepsilon_0 > 0$ so klein, daß $\mathbb{P}(X_t - X_s > \varepsilon_0) > 0$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$. Sei nun $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. Aus dem Lemma von Borell–Cantelli folgt, daß für jede Folge von verschiedenen Indices $t_1, s_1, t_2, s_2, \ldots$ mit $t_i, s_i \in$

$[k\delta,(k+1)\delta[$ gilt: $\mathbb{P}(|X_{t_i} - X_{s_i}| < \varepsilon_0 \text{ u.o.}) = 0$, insbesondere $\mathbb{P}(\sup_i |X_{t_i} - X_{s_i}| < \varepsilon_0) = 0$. Also gilt f.s. $\sup_{t,s\in[k\delta,(k+1)\delta} |X_t - X_s| > \varepsilon_0$, und also existiert eine meßbare Menge $\Omega_{\varepsilon_0,\delta}$ vom Maß 1, sodaß

$$\forall \omega \in \Omega_{\varepsilon_0,\delta}\ \forall k \in \mathbb{Z} \qquad \sup_{t,s\in[k\delta,(k+1)\delta[} |X_t - X_s| > \varepsilon_0 \; .$$

Wir bilden nun $\Omega_0 := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Omega_{\varepsilon_0,2^{-m}}$ und behaupten, daß auf Ω_0 jeder Pfad von X unstetig in jedem Punkte ist. Gäbe es nämlich ein $\omega \in \Omega_0$, sodaß $X.(\omega)$ in einem Punkte r stetig wäre, so gäbe es ein $\delta > 0$, sodaß für alle s mit $|r - s| < \delta$ gelten würde $|X_t - X_s| < \varepsilon_0/2$. Dann würde aber folgen:

$$\sup_{t,s\in[k\delta,(k+1)\delta} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq \sup_{t\in[k\delta,(k+1)\delta} |X_t(\omega) - X_r(\omega)| + \sup_{t\in k\delta,(k+1)\delta} |X_r(\omega) - X_s(\omega)| \; ;$$

was im Widerspruch zur Definition von Ω_0 stünde.

Aufgabe 3: Beweisen oder widerlegen Sie: Falls ein stochastischer Prozeß X auf $[0,\infty[$ stetige Pfade besitzt, so ist seine kanonische Filtration $\mathfrak{F}_t^X$ rechtsstetig.
Lösungsvorschlag: Die Behauptung ist falsch; eine Gegenbeispiel ist z.B. folgender Prozeß: Sei $\Omega = \{h, r\}, \mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$, und setze $X_t(h) := t$, $X_t(r) := -t$. Offenbar ist X stetig, und $\mathfrak{F}_0^X = \{\emptyset, \Omega\}$, während für jedes $t > 0$ gilt, daß $\mathfrak{F}_t^X = \mathfrak{P}(\Omega)$.

Aufgabe 4:

(a) Sei $I \neq \emptyset$ und $(S, \mathfrak{S})$ ein Meßraum. Die σ–Algebra $\mathfrak{S}^I$ ist die kleinste σ–Algebra auf S^I, bezüglich der alle Projektionen $\pi_s : S^I \to S$, $f \mapsto f(s)$, meßbar sind. Zeigen Sie, daß eine Abbildung $U : (\Omega', \mathfrak{A}') \to (S^I, \mathfrak{S}^I)$ meßbar ist genau dann, wenn alle Abbildungen $\pi_s \circ U : (\Omega', \mathfrak{A}') \to (S, \mathfrak{S})$ meßbar sind.

Lösungsvorschlag: Sei zunächst U meßbar bezüglich $\mathfrak{A}', \mathfrak{S}^I$. Weil die Projektionen π_s $\mathfrak{S}^I$–$\mathfrak{S}$–meßbar sind, sind die Kompositionen $\pi_s \circ U$ offenbar $\mathfrak{A}'$–$\mathfrak{S}$–meßbar. Sei nun umgekehrt für jedes $s \in I$ die Abbildung $\pi_s \circ U$ eine $\mathfrak{A}'$–$\mathfrak{S}$–meßbare Abbildung. Wir betrachten nun

$$\mathfrak{T} := \left\{ A \subseteq S^I \ : \ U^{-1}(A) \in \mathfrak{A}' \right\} .$$

Dies ist eine σ–Algebra, weil $U^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i U^{-1}(A_i)$, $U^{-1}(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i (U^{-1} A_i)$ und $U^{-1}(A^c) = [U^{-1}(A)]^c$. Nun sind die σ–Algebren $\sigma(\pi_s)$

Teilmengen von $\mathfrak{T}$: Für $A \in \sigma(\pi_s)$, $A = \pi_s^{-1}(B)$, $B \in \mathfrak{S}$ ist $U^{-1}(A) = (\pi_s \circ U)^{-1}(B) \in \mathfrak{A}'$ nach Voraussetzung. Da $\mathfrak{S}^I$ aber die kleinste σ–Algebra ist, welche alle σ–Algebren $\sigma(\pi_s)$ enthält, folgt $\mathfrak{S}^I \subseteq \mathfrak{T}$, und damit ist U meßbar.

(b) Es sei X ein stochastischer Prozeß auf $[0, \infty[$ von dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ in den Zustandsraum $(S, \mathfrak{S})$. Folgern Sie aus (a) für die Abbildung $U : \Omega \to S^{[0,t]}$, $U(\omega) = (X_s(\omega))_{s \leq t}$ daß $\sigma(U) = \mathfrak{F}_t^X$.

Lösungsvorschlag: Nach Teil (a) ist für jede σ–Algebra $\mathfrak{A}'$ die Abbildung U $\mathfrak{A}'$–$\mathfrak{S}^{[0,t]}$–meßbar genau dann, wenn die Abbildungen $(\pi_s \circ U)(\omega) = X_s(\omega)$ alle $\mathfrak{A}'$–$\mathfrak{S}$–meßbar sind. Die kleinste σ–Algebra $\sigma(U)$, bezüglich der U $\sigma(U)$–$\mathfrak{S}^{[0,t]}$–meßbar ist, ist also die kleinste σ–Algebra, bezüglich der alle Zufallsvariablen X_s, $s \leq t$, meßbar sind, und das ist nach Definition gerade $\mathfrak{F}_t^X$.