Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
17./19.07.2007

7.Übungsblatt zur „Mathematik II für Chemiker und LaB“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Implizite Funktionen)

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

(a) Für welche (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = 0$ kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. für welche (x_0, y_0) gibt es eine geeignete Umgebung von x_0, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

(b) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. gibt es eine geeignete Umgebung von $\sqrt[3]{0.5}$, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

(c) Berechnen Sie $f'(x_0)$, ohne $f(x_0)$ explizit zu bestimmen.

(d) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

Aufgabe G2 (Richtungsfelder)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

a) Bestimmen Sie für $y > 0$ die Isoklinen, skizzieren Sie das Richtungsfeld, und tragen Sie einige Lösungskurven ein.

b) Erraten Sie anhand der Skizze diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt. Prüfen Sie das Ergebnis durch eine Probe.

Aufgabe G3 (Differentialgleichungen)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen jeweils Lösungen der angegebenen Differentialgleichungen sind:

a) $y' = \lambda y$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; $\quad y(x) = C \cdot e^{\lambda x}$, $C \in \mathbb{R}$

b) $y' = xy$; $\quad y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$, $C \in \mathbb{R}$

c) $y' = -2x \cdot y^2$; $\quad y(x) = \frac{1}{x^2+C}$, $C \in \mathbb{R}$

Aufgabe G4 (Trennung der Veränderlichen)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{\sin y}{x}, \quad y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0$$

durch Trennen der Veränderlichen.

Aufgabe G5 (Lösung exakter Differentialgleichungen)
Schreiben Sie die Differentialgleichung

$$(4x^2 \cdot y^3 + x \cdot \cos y) \cdot y' + 2x \cdot y^4 + \sin y = 0$$

in eine symmetrische Form um und zeigen Sie, dass sie exakt ist. Sodann geben Sie die allgemeine Lösung an.

Hinweis: Mit symmetrischer Form ist folgende Gestalt gemeint.

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$$

Siehe auch Seite 21, (10) im Skript zu den DGl's.

Aufgabe G6 (Lineare DGl's mit konstanten Koeffizienten)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0,$

(b) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$

(c) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$