Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
19./21.06.2007

5.Übungsblatt zur „Mathematik II für Chemiker und LaB“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Direkte Inversenberechnung)

Die Inverse einer Martix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ lässt sich unter anderem folgendermaßen bestimmen:
Man stellt der zu invertierenden Matrix A die Einheitsmatrix I gegenüber. Nun formt man mittels elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen A in eine Einheitsmatrix um. Alle Umformungen werden genauso an der gegenübergestellten Matrix I vorgenommen. Die Matrix, welche man hierdurch erhält, ist A^{-1}.

Beispiel: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir teilen im ersten Schritt alle Zeilen durch 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\overset{Z2+Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{Z1+Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\overset{Z3-Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Zeilenvertauschung und Multiplikation mit -1

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Somit gilt

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Inversen zu folgenden Matrizen!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie das Ergebnis durch Berechnung von AA^{-1} und BB^{-1}.

Aufgabe G2 (Eigenwerte einer Dreiecksmatrix)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

eine Dreiecksmatrix.
Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A. Was sind die Eigenwerte dieser Matrix?

Aufgabe G3 (Transformationsmatrizen)
Im Komplexen gilt, dass zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine **unitäre** Matrix $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ existiert, so dass

$$D = \bar{B}^T \cdot A \cdot B$$

eine (obere) Dreiecksmatrix ist.

Zeigen Sie, dass für die reelle orthogonale Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

keine **orthogonale** Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

existiert, so dass $D = B^T \cdot A \cdot B$ Dreiecksgestalt hat.

Berechnen Sie nun $\bar{C}^T \cdot A \cdot C$, wobei C die komplexe unitäre Matrix

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

sei.

Aufgabe G4 (Hauptachsentransformation)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

Eine symmetrische Matrix M ist diagonalähnlich mit einer orthogonalen Transformationsmatrix. D.h. es existiert eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = D,$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist.

(c) Bestimmen Sie die zu A gehörenden Matrizen S und S^{-1}.

(d) Geben Sie die Matrix D an, zu der A diagonalähnlich ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Quadratische Form) (4 Punkte)

Gegeben sei die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ an, so dass gilt:

$$Q_A(x) = x^T \cdot A \cdot x = Q(x) \qquad \text{mit} \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3,3}$ derart, dass gilt:

$$S^T \cdot A \cdot S = D,$$

mit einer Diagonalmatrix D.

(c) Bestimmen Sie die quadratische Form

$$\tilde{Q}_D(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \cdot D \cdot \tilde{x} \quad \text{mit} \quad \tilde{x} = S^T \cdot x,$$

wobei D die Diagonalmatrix und S die orthogonale Matrix aus Aufgabenteil (b) ist.

Aufgabe H2 (Eigenwerte und Eigenvektoren) (4 Punkte)

Für $a = 2$ und $a = -2$ betrachten wir die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie in beiden Fällen die Eigenwerte der Matrix.

(b) Im Fall $a = 2$ besitzt A Eigenvektoren, die eine Orthonormalbasis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ bilden, d.h. sie haben jeweils Länge 1 und sie stehen paarweise senkrecht aufeinander. Bestimmen Sie eine solche Basis und verifizieren Sie, dass für die Matrix $U = (u_1, u_2, u_3)$

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

gilt, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A sind. (Beachten Sie, dass Matrizen, deren Spaltenvektoren Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, orthogonale Matrizen sind, d.h. es gilt $U^{-1} = U^T$.)

(c) Gibt es auch im Fall $a = -2$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A?

Aufgabe H3 (Positiv und negativ definit bzw. semidefinit) (4 Punkte)

(a) Welche der folgenden Matrizen sind

(i) positiv definit,
(ii) negativ definit,
(iii) indefinit,
(iv) positiv semidefinit,
(v) negativ semidefinit?

Begründen Sie jeweils und geben Sie im indefiniten Fall Vektoren an, die Ihre Behauptung belegen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_7 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Geben Sie die Werte von a an, für die die Matrix A positiv definit ist.