Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
8./10.05.2007

2.Übungsblatt zur „Mathematik II für Chemiker und LaB“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Vektorrechnung)
Gegeben seien die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Sie bilden die Eckpunkte eines Dreiecks. Skizzieren Sie das Dreieck.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen und die Winkel des Dreiecks.

b) Geben Sie den Flächeninhalt des Dreiecks an.

c) Die Ortsvektoren des Dreiecks spannen ein Parallelotop auf. Bestimmen Sie dessen Volumen.

d) Finden Sie einen Vektor, der auf dem Dreieck senkrecht steht.

Aufgabe G2 (Geradenschnitte und Hessesche Normalform)
Gegeben seien die beiden Geraden

$$g_1 : \vec{r_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$g_2 : \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

b) Wie groß ist der Schnittwinkel der beiden Geraden?

c) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene an, die durch $(0, 8, 15)^T$ und die beiden Richtungsvektoren von g_1 und g_2 gegeben ist.

Aufgabe G3 (Lineare Abhängigkeit)
Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ bilden. Sind die Vektoren linear abhängig? Welche Teilmenge dieser Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Hinweis: Um zu zeigen, dass $v_1, ..., v_4$ ein Erzeugendensystem im $\mathbb{R}^3$ bilden, wählen Sie eine bekannte einfache Basis des $\mathbb{R}^3$ und zeigen Sie, dass sich diese als Linearkombination von $v_1, ..., v_4$ darstellen lässt. Zeigen Sie damit, dass sich jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ aus $v_1, ..., v_4$ erzeugen lässt.

Aufgabe G4 (Lineare Abbildungen)

Gegeben sind die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

sowie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren u_1, u_2, u_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Berechnen Sie $\varphi(u_4)$.

c) Geben Sie einen Vektor u_5 mit $\varphi(u_5) = w$ an.

Hinweis:

zu b): Geben Sie u_4 als Linearkombination von $u_1, ..., u_3$ an und nutzen Sie dann aus, dass φ eine lineare Abbildung ist.

zu c): Gehen Sie analog zu Teil b) vor, d.h. w als Linearkombination der Bilder von $u_1, ..., u_3$ angeben und dann die Eigenschaften einer linearen Abbildung ausnutzen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Ebenendarstellung) (4 Punkte)

Seien E_1 und E_2 zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad E_2 : 2x + y = -z.$$

a) Stellen Sie E_1 und E_2 in Hessescher Normalform dar, d.h. finden Sie einen Ortsvektor $\vec{r}_1$ und einen Normalenvektor $\vec{n}$, so daß die Ebene durch folgende Gleichung beschrieben werden kann: $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_1 \cdot \vec{n}$.

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen.

Hinweis: Überlegen Sie, wo der Winkel zwischen den Ebenen sonst noch auftaucht. Nutzen Sie die Berechnungen aus Teil a) aus.

c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $(-4, 11, 1)^T$ von E_1.

Aufgabe H2 (Lineare Abhängigkeit) (4 Punkte)

Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear unabhängig? Welche sind Basen? Ergänzen Sie gegebenenfalls zu einer!

$$(i) \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{R}^3 \qquad (ii) \quad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{R}^3$$

$$(iii) \quad \left[\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{R}^2 \qquad (iv) \quad \left[x^2 - 1, x + 1, x - 1, x \right] \in \mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$$

$$(v) \quad \left[2x^3 - 2x^2 + 5x, -3x^3 + 3x^2 - x, x^3 - 18x^2 + 23x \right] \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$$

Aufgabe H3 (Lineare Abbildungen) (4 Punkte)

Zeigen Sie welche der folgenden Fälle eine lineare Abbildung beschreiben.

(i) $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto p(x)$, für beliebige $p \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$

(ii) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$

(iii) $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto v + t$ mit $t \in \mathbb{R}^n$, fest

(iv) $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u \mapsto \alpha u$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, fest

(v) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_2 \\ v_1 + 2v_2 \\ 3v_1 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$

Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildungen!