Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
10.07.2007

Testklausur „Mathematik II für Chemiker und LaB“

Name: .... | Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	4	4	4	4	4	4	4	28	
erreichte Punktzahl									

1. Aufgabe(Komplexe Zahlen und Gaußsche Zahlenebene) (10 Punkte)

(a) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene.

(i) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$
(ii) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$
(iii) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < Re(iz) < 1\}$
(iv) $M_4 := \{z \in \mathbb{C} : |z-3| = 2\}$

(b) Lösen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Gleichungen und geben Sie die Lösungen von (iii) sowohl in Polarkoordinaten als auch in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

(i) $z^3 = \sqrt{3} + 3i$
(ii) $z^4 = -16$
(iii) $z^3 = 1$

2. Aufgabe(Lineare Abhängigkeit und Basen) (6 Punkte)

Betrachten Sie für die folgenden Matrizen jeweils die Mengen der Spaltenvektoren. Stellen Sie fest, welche dieser Mengen linear (un-)abhängig sind. Untersuchen Sie weiterhin, welche der Mengen ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und bestimmen Sie den Rang der Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe(Inverse Matrizen) (8 Punkte)

(a) Es sei ein Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ gegeben und die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. Berechnen Sie anschließend A^T und $\det A$.

(b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ist A invertierbar?

4. Aufgabe(Vektoren/Ebenen) (5 Punkte)

Wir betrachten die durch drei Punkte $P_1(-1,0,1)$, $P_2(0,2,0)$ und $P_3(-3,-1,0)$ definierte Ebene E und eine Gerade

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Normalenform von E.

(b) Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.

5. Aufgabe(Lineare Abbildungen und Matrizen) (6 Punkte)

(a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten beschreibt. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix, d.h. ermitteln Sie diejenige Matrix A_φ, bezüglich der

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(b) Die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist bestimmt durch

$$\psi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie erneut eine Matrix A_ψ mit

$$\psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie die zu $\psi \circ \varphi$ gehörige Abbildungsmatrix.

6. Aufgabe(Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit) (12 Punkte)

(a) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(ii) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

(b) Mit einer symmetrischen Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist die quadratische Form $Q_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_B(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

assoziiert.

(i) Geben Sie die Matrix B an und entscheiden Sie, ob B positiv oder negativ definit ist.

(ii) Begründen Sie, warum die Matrix B diagonalähnlich ist und geben Sie eine geeignete invertierbare Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $S^{-1} \cdot B \cdot S = D$ an, wobei $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix bildet.

7. Aufgabe(Volumenberechnung) (7 Punkte)

Durch die Menge

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, z \geq \frac{1}{2} \right\}$$

wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von K.