



1. Übungsblatt zur „Mathematik II für Chemiker und LaB“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

- a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen z . Geben Sie auch den Betrag an.

$$(i) z = (2 + i) \cdot \overline{(-1 + 6i)} \quad (ii) z = \frac{3 + 2i}{1 - i} - \frac{5 + i}{3 + i} \quad (iii) z = \frac{1}{i} \quad (iv) z = e^{a+ib} \quad (v) e^z = i$$

Hinweis: Setzen Sie in Teil v) $z := a + ib$ und nutzen Sie die Darstellung in Polarkoordinaten.

- b) Veranschaulichen Sie sich geometrisch, was die Konjugierte einer komplexen Zahl ist und was die Multiplikation einer komplexen Zahl mit i bewirkt.

Aufgabe G2 (Polarkoordinatendarstellung)

Seien $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$ und $z_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellungen von z_1 und z_2 .
b) Berechnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus a) die Polarkoordinatendarstellungen von $z_3 = z_1 z_2$, $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$ und $z_5 = z_2^{12}$.
c) Geben Sie z_3 , z_4 und z_5 in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe G3 (Wurzeln, Gleichungen und Gaußsche Zahlenebene)

- a) Skizzieren Sie folgende Mengen in der Gaußschen Zahlenebene.

$$(i) M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\},$$
$$(ii) M_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| \leq |z - i| \leq |z - 1|\}.$$

- b) Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Lösungen der folgenden Gleichungen.

$$(i) z^6 = 5 + 2i,$$
$$(ii) 4z + \frac{52}{z} = 24 \text{ mit } z \neq 0.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

(4 Punkte)

Es seien $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ und $z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$ gegeben. Geben Sie Realteil, Imaginärteil, Argument und Polarkoordinatendarstellung dieser komplexen Zahlen an. Tragen Sie sie zudem in die komplexe Zahlenebene ein und bringen Sie

$$(a) z_1 - 2z_2 \quad (b) \overline{z_3}(-z_4) \quad (c) z_3^2 + 3z_2$$

in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H2 (Wurzeln, Gleichungen und Gaußsche Zahlenebene)

(4 Punkte)

a) Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Lösungen der folgenden Gleichungen:

(i) $z^2 - (3 + 5i)z - 16 + 4i = 0$,

(ii) $z^6 + 64i = 0$.

Hinweis: In Aufgabenteil (i) führen Sie zuerst eine quadratische Ergänzung durch. Man erhält eine Darstellung der folgenden Art: $(z + a)^2 = b$

Nun sucht man zu b die beiden Quadratwurzeln $\pm(x + iy)$. Mit $b = (x + iy)^2$ kann man nun x und y und damit die Lösungen der quadratischen Gleichung angeben.

b) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in die Gaußsche Zahlenebene ein.

(i) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) = 4\}$,

(ii) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : 3z\bar{z} - 6z - 6\bar{z} + 9 = 0\}$.

Hinweis: Formen Sie die Gleichung aus M_2 in eine Kreisgleichung um. Dazu sollten Sie sich zuerst überlegen, was $z\bar{z}$ und $z - \bar{z}$ ist.

Aufgabe H3 (Winkelbeziehungen)

(2 Punkte)

Zeigen Sie das für $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\sin 4\varphi = 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi$

b) $\cos(\varphi + \vartheta) = \cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \vartheta$

Hinweis: Nutzen Sie für a) die Moivresche Formel (s. hierzu "Arbeitsbuch Mathe für Ingenieure, v. Finkenstein .." Seite 65/66).

Für b) betrachten Sie $e^{i\varphi} \cdot e^{i\vartheta} = e^{i(\varphi+\vartheta)}$ und benutzen anschließend die Darstellung in Polarkoordinaten.