Splineapproximation

Ulrich Reif

Sommersemester 2007

Themen:

- **Splines und B-Splines**
  - Grundlagen
  - Abstand Spline – Kontrollpolygon
- **Interpolation**
  - Minimaleigenschaften von Splineinterpolanten
  - Satz von Schoenberg-Whitney
- **Quasi-Interpolation**
  - Duale Funktionale
  - Stabilität der B-Splinebasis
  - Approximationsordnung
- **Approximation**
  - Norm-Approximation
  - Smoothing Splines
  - Orthogonalitätsrelationen
- **Parametrisierung**
  - Nichtuniforme Ansätze
  - Parameterkorrektur
  - Geometrische Approximation
- **Multivariate Approximation**
  - Approximation auf regulären Gittern
  - Scattered Data Approximation
- **Finite Elemente**
  - Stabilität der Galerkin-Matrix
  - Fehlerabschätzungen

Literatur:

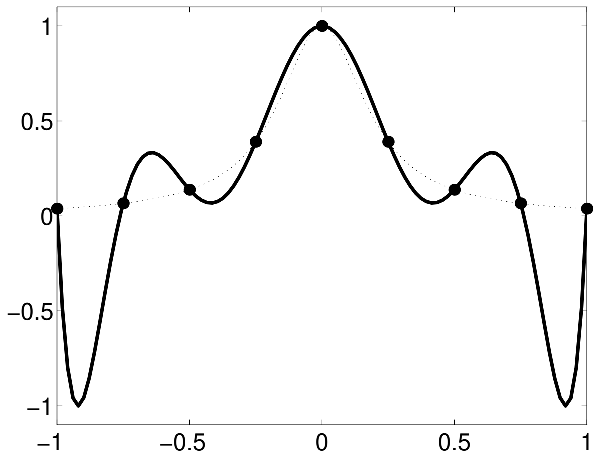
- *C. de Boor*, A Practical Guide to Splines, Springer
- *L. Schumaker*, Spline Functions Basic Theory, Krieger
- *J. Hoschek und D. Lasser*, Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung, Teubner
- *K. Höllig*, Finite Element Methods with B-Splines, SIAM

1. Splines und B-Splines

Nachteile polynomialer Funktionen und Kurven:

- Globale Abhängigkeit der Funktion/Kurve von den Koeffizienten.
- Interpolation von Funktionenwerten liefert u.U. schlechte Approximation.

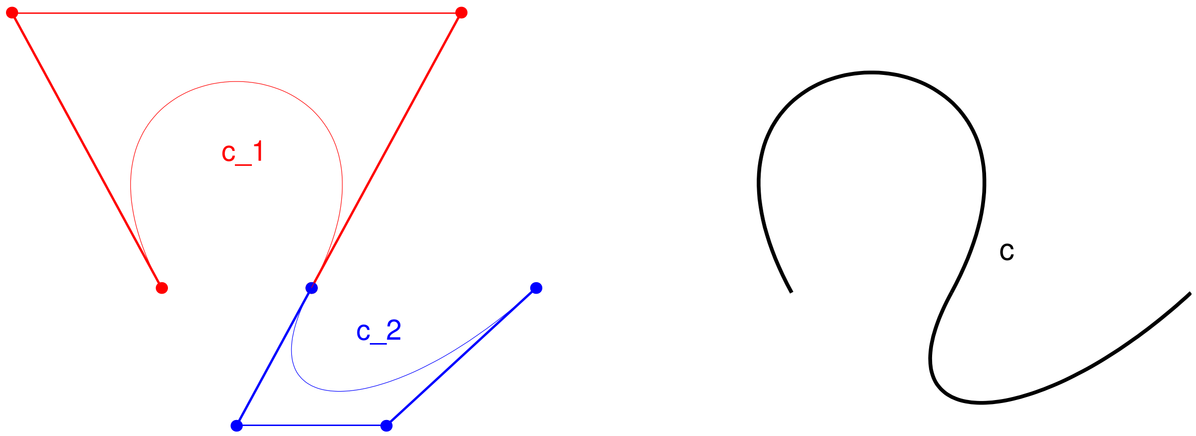
  Beispiel: Interpolation von $f(x) = 1/(1+25x^2)$ an 9 äquidistanten Stützstellen.



- Erzwungene Glattheit.

Idee: Verwende stückweise polynomiale Funktionen.

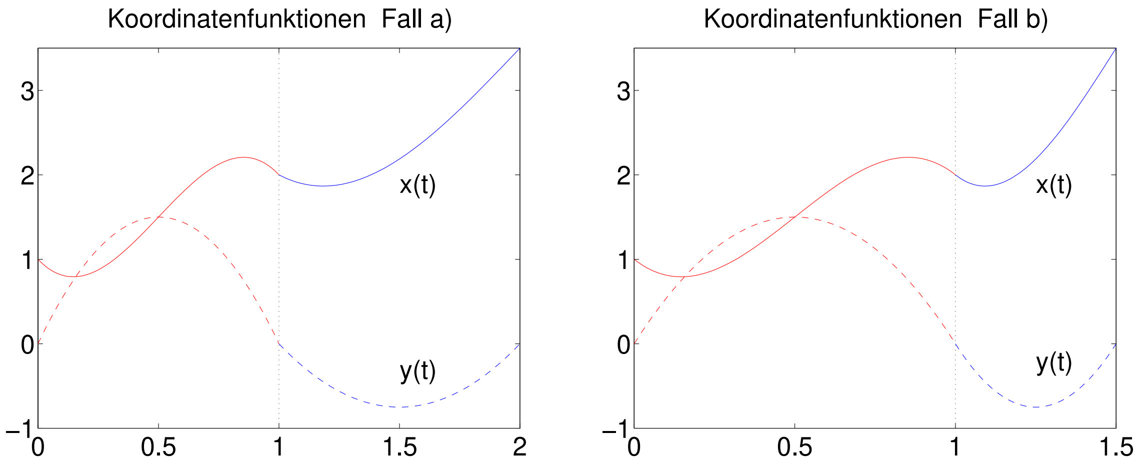
Beispiel: Zusammenfügen zweier Bézierkurven.



Es gibt viele Möglichkeiten, die zusammengesetzte Kurve zu parametrisieren, z.B.:

a) $$\mathbf{c}(t) = \begin{cases} \mathbf{c}_1(t) & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ \mathbf{c}_2(t-1) & \text{für } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

b) $$\mathbf{c}(t) = \begin{cases} \mathbf{c}_1(t) & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ \mathbf{c}_2(2t-2) & \text{für } 1 \le t \le 3/2 \end{cases}$$

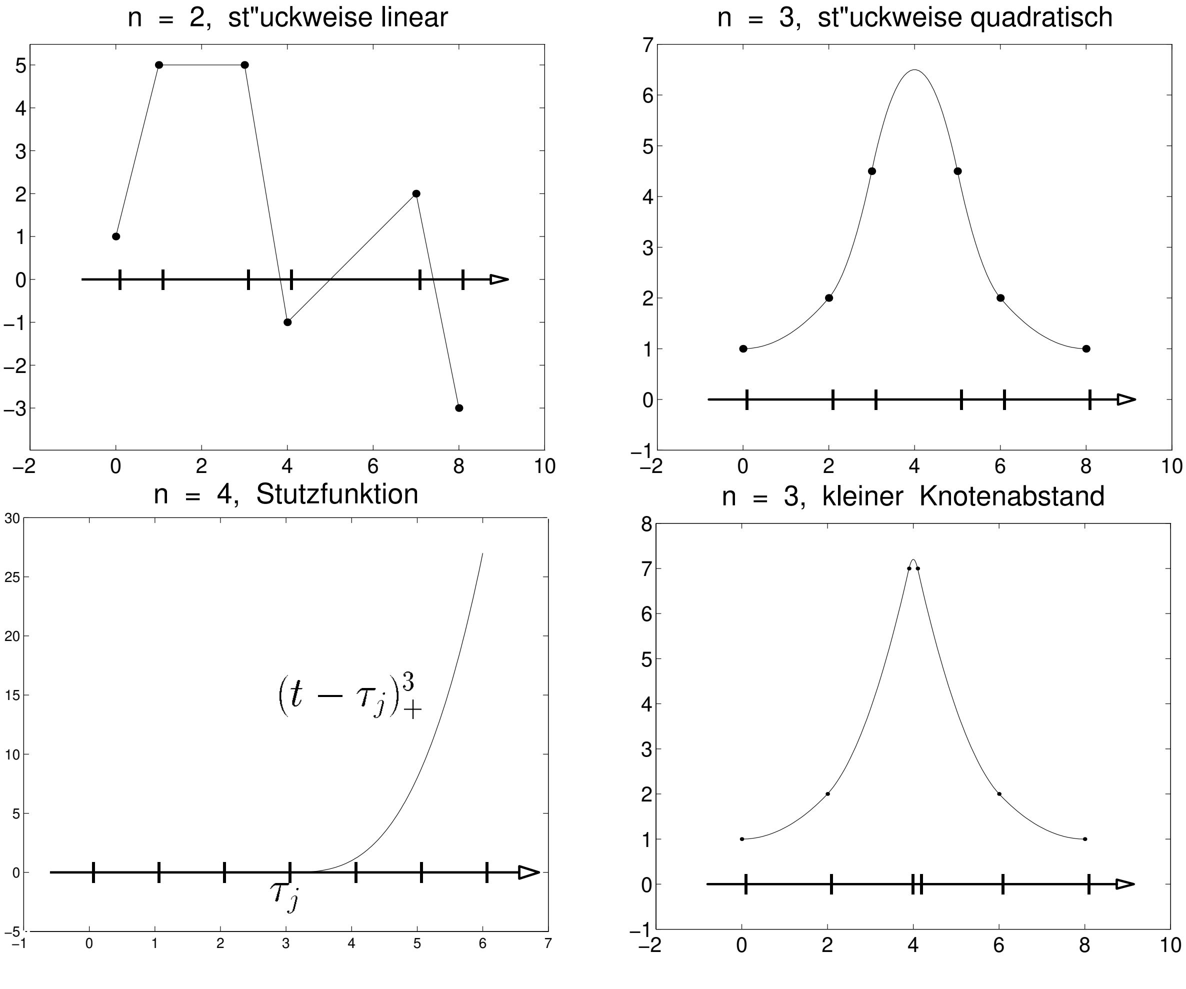


Die Koordinatenfunktionen sind stückweise polynomial und im Fall b) stetig differenzierbar.

Ein *Spline* der Ordnung n ist eine Funktion, die stückweise aus Polynomen der Ordnung n besteht. Die Abszissen τ_j, die die Polynomsegmente trennen, heißen *Knoten*. Die Knoten werden zu der *Knotenfolge* $T = \{\tau_j\}$ zusammengefasst.

Welche Glattheit kann man an den Knoten erwarten? Wenn zwei Polynomsegmente der Ordnung n $(n-1)$-mal stetig differenzierbar verbunden sind, dann stellen sie ein und dasselbe Polynom dar.
Man vereinbart: An einfachen Knoten ist ein Spline mindestens $(n-2)$-mal stetig differenzierbar.

Beispiele:



Frage: Betrachte nun Splines der Ordnung $n+1$. Für jeden Knoten τ_j ist die *abgebrochene Potenz*

$$(t-\tau_j)_+^n\ , \quad z_+ := \max\{0, z\}\ ,$$

ein Element des Splineraums. Betrachte o.B.d.A. die Knoten $\tau_j := 0$ und $\tau_{j+1} := h$, dann sind

$$t_+^n \quad \text{und} \quad (t-h)_+^n$$

Splines und folglich auch die Linearkombination

$$f_h(t) = \frac{t_+^n - (t-h)_+^n}{nh} = \begin{cases} 0 & , t \le 0 \\ t^n/(nh) & , t \in (0,h) \\ (t^n - (t-h)^n)/(nh) & , t \ge h\ . \end{cases}$$

Im Grenzübergang gilt $\tau_j = \tau_{j+1}$ und

$$\lim_{h\to 0} f_h(t) = t_+^{n-1}\ ,$$

die Differenzierbarkeitsordnung ist also nur noch $n-2$.

Man vereinbart: An einem k-fachen Knoten, ist ein Spline der Ordnung $n+1$ $(n-k)$-mal stetig differenzierbar.

Stetigkeitsargument: Sei $\tau_j = \cdots = \tau_{j+k-1} = 0$ ein k-facher Knoten und $\tau_{j+k} = h$, dann sind per Induktionsannahme die abgebrochenen Potenzen

$$t_+^n\ \ t_+^{n-1}, \cdots, t_+^{n-k+1} \quad \text{und} \quad (t-h)_+^n$$

Elemente des Splineraums. Betrachte die Splinefunktion

$$f_h(t) := \frac{(t-h)_+^n - \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{n}{\mu} (-h)^\mu t_+^{n-\mu}}{\binom{n}{k}(-h)^k}\ ,$$

dann folgt für $k \le n$ mit Hilfe der binomischen Formel

$$\lim_{h\to 0} f_h(t) = t_+^{n-k}\ .$$

Die *Knotenfolge* T eines Splineraums der Ordnung n ist eine endliche, monoton wachsende Folge reeller Zahlen der Form

$$T := \tau_1, \ldots, \tau_{m+n} \ .$$

Die Knotenfolge heißt *nicht entartet*, wenn

$$\tau_n < \tau_{n+1}, \quad \tau_m < \tau_{m+1}, \quad \tau_j < \tau_{j+n} \ \forall \ j, \quad m \geq n.$$

Ein *Spline* der Ordnung n über der Knotenfolge T ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \mapsto \mathbb{R}$, die auf den Intervallen $[\tau_j, \tau_{j+1})$ mit Polynomen der Ordnung n übereinstimmt und an k-fachen Knoten $(n-k-1)$-mal stetig differenzierbar ist.
Der Raum aller Splines der Ordnung n über einer Knotenfolge T wird mit $\mathcal{S}_{n,T}(D)$ bezeichnet.

Konventionen: Außerhalb des Intervalls $[\tau_1, \tau_{m+n}]$ sind alle Splines identisch Null.

Meist wählt man den Definitionsbereich $D = D(T) = [\tau_n, \tau_{m+1})$.

Die Anzahl der identischen Nachfolger eines Knotens ist

$$\#j := \max\{k : \tau_{j+k} = \tau_j\} \ .$$

Für die k-fache Wiederholung eines Knotens schreibt man

$$\tau_j \$ k := \underbrace{\tau_j, \tau_j, \ldots, \tau_j}_{k-\text{mal}} \ .$$

Beispiel: $T = -1, 0\$2, 1\$3, 2, 3, 4.$

T	-1	0	0	1	1	1	2	3	4
$n = 1, m = 8$	$\boxed{\tau_1}$	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	$\boxed{\tau_9}$
$n = 2, m = 7$	τ_1	$\boxed{\tau_2}$	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	$\boxed{\tau_8}$	τ_9
$n = 3, m = 6$	τ_1	τ_2	$\boxed{\tau_3}$	τ_4	τ_5	τ_6	$\boxed{\tau_7}$	τ_8	τ_9
$n = 4, m = 5$	τ_1	τ_2	τ_3	$\boxed{\tau_4}$	τ_5	$\boxed{\tau_6}$	τ_7	τ_8	τ_9

T ist entartet für $n = 1, 2, 4$ und nicht entartet für $n = 3$.

Theorem: Der Raum $\mathcal{S}_{n,T}$ ist linear. Für eine nicht-entartete Knotenfolge T ist eine Basis des Raums $\mathcal{S}_{n,T}(D(T))$ gegeben durch

$$a_j^n(t) := (t - \tau_j)_+^{n-1-\#j} \ , \quad j = 1 : m \ .$$

Insbesondere ist dann $\dim \mathcal{S}_{n,T}(D(T)) = m$.

Beweis: Die Linearität ist trivial. Zunächst wird die Dimensionsformel per vollständiger Induktion bewiesen:
Induktionanfang: Für $m = n$ ist $\dim \mathcal{S}_{n,T}(D(T)) = n$.
Induktionsannahme: Die Behauptung sei richtig für m.
Induktionsschluss: Füge in eine Knotenfolge T der Länge $m + n$ einen weiteren Knoten $\tau^* \in (\tau_n, \tau_{m+1})$ ein. Ist k die Vielfachheit des neuen Knotens τ^*, dann gilt

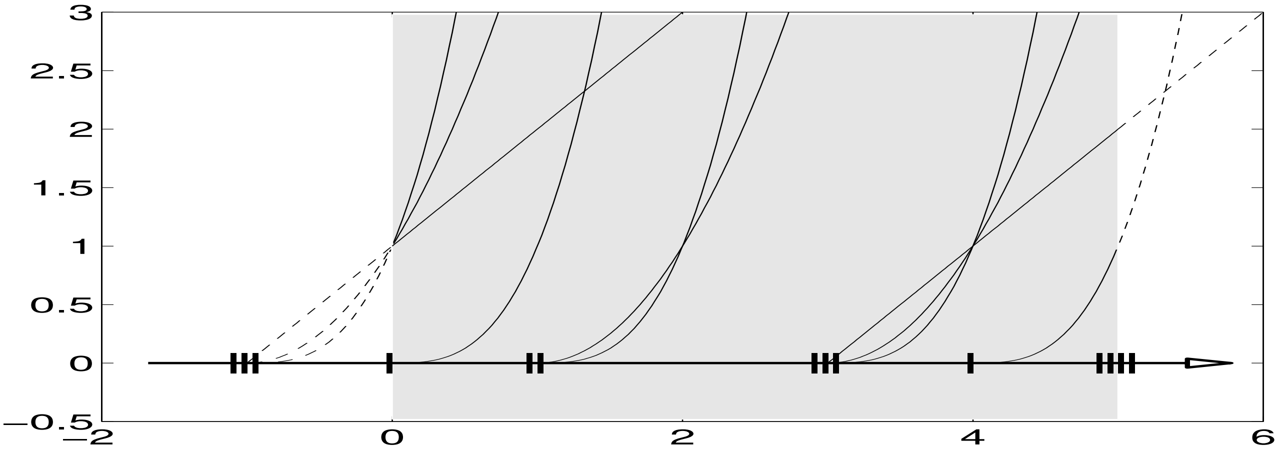
$$\mathcal{S}_{n,T^*}(D(T)) = \mathcal{S}_{n,T}(D(T)) \oplus \operatorname{span}(t - \tau^*)_+^{n-k} \ ,$$

also ist $\dim \mathcal{S}_{n,T^*}(D(T)) = m + 1$.

Die m Funktionen $a_j^n(t)$ sind linear unabhängig und liegen in $\mathcal{S}_{n,T}(D(T))$. Folglich bilden sie eine Basis.

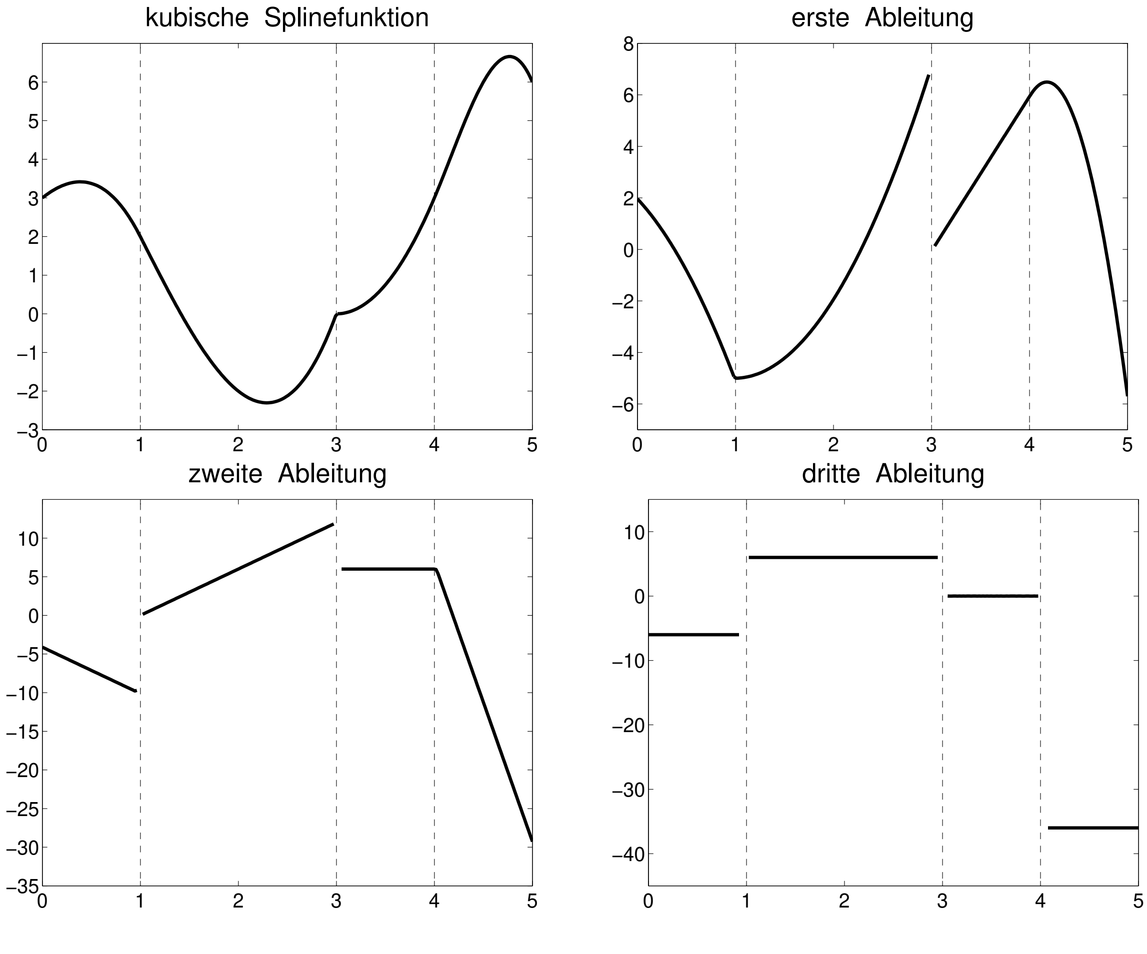
Beispiel: Basis $\{a_j^n(t)\}_{j=1}^m$ aus abgebrochenen Potenzen für $n = 4$ und die Knotenfolge

$$T = -1,\ -1,\ -1,\ \mathbf{0},\ 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ \mathbf{5},\ 5,\ 5,\ 5\ .$$



Splinefunktion $f(t) = \sum_j q_j\, a_j^n(t)$ mit Koeffizienten

$$q = [3,\ 1,\ -1,\ 0,\ 5,\ 2,\ -7,\ -3,\ -1,\ -6]\ .$$



Nachteile der Basis aus abgebrochenen Potenzen:

- keine Symmetrie
- globaler Charakter
- keine erkennbare Relation zwischen Koeffizienten und Geometrie
- mangelnde Stabilität (Koeffizienten klein, Funktion groß)

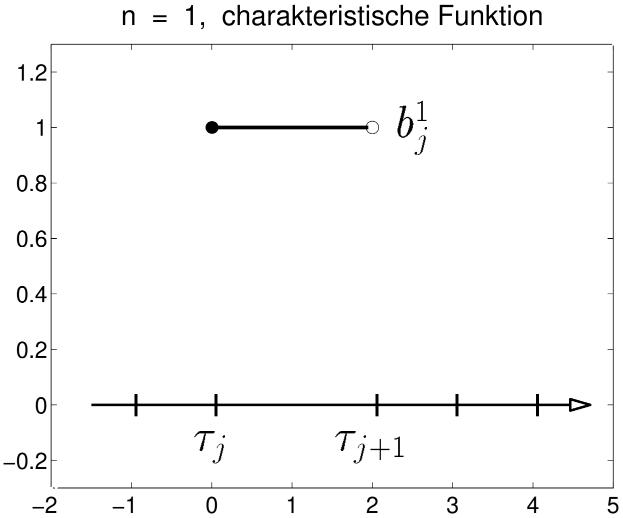
Konstruktion einer Basis mit günstigeren Eigenschaften:

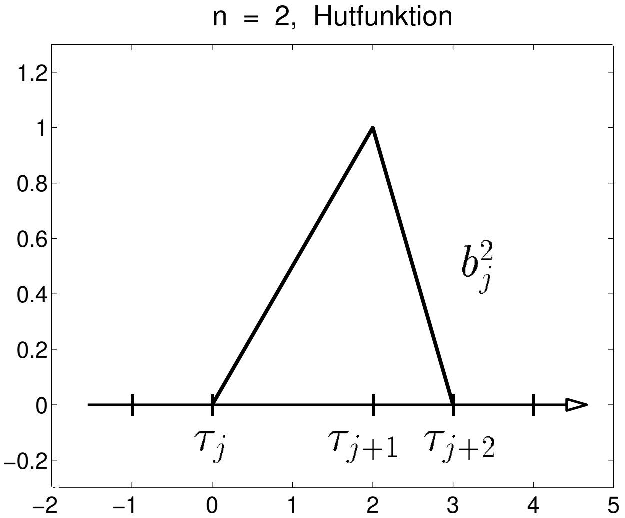
$n = 1$, wähle charakteristische Funktionen der Segmente:

$$b_j^1(t) = \chi\big([\tau_j, \tau_{j+1})\big) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau_j \le t < \tau_{j+1} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

$n = 2$, wähle Hutfunktionen:

$$b_j^2(t) = \begin{cases} \dfrac{t - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j} & \text{für } \tau_j \le t < \tau_{j+1} \\ \dfrac{\tau_{j+2} - t}{\tau_{j+2} - \tau_{j+1}} & \text{für } \tau_{j+1} \le t < \tau_{j+2} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$





Sei T eine einfache Knotenfolge. Dann gibt es bis auf Skalierung eindeutig bestimmte Splines

$$b_j^n(t) = \sum_{k=j}^{j+n} q_{j,k}\, a_k^n(t)$$

der Ordnung n über T mit kompaktem nichtleeren Träger. Für diesen gilt

$$\operatorname{supp} b_j^n = s_j^n := [\tau_j, \tau_{j+n}]\ .$$

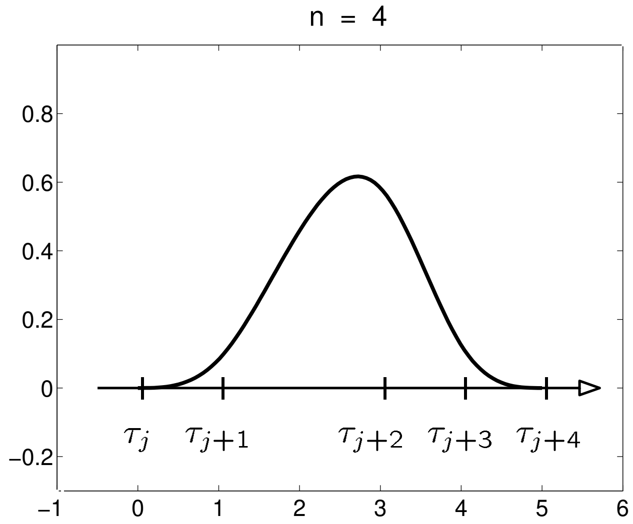
Beweis: Für festes $q_{j,j+r} \neq 0$ und $t \geq \tau_{j+r}$ ist das Gleichungssystem

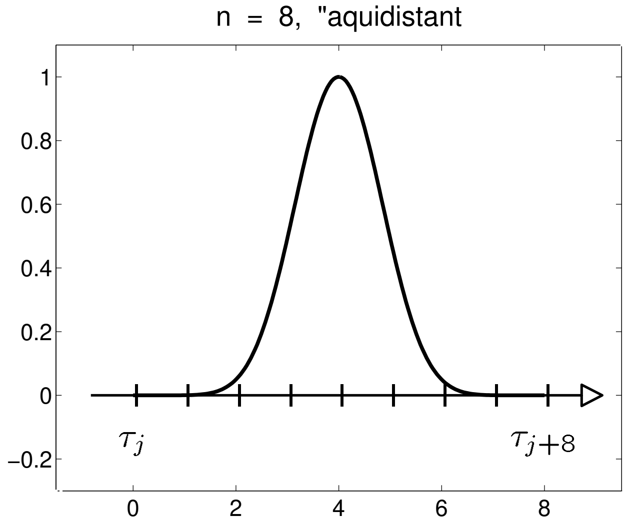
$$\sum_{k=j}^{j+r-1} q_{j,k}\, a_k^n(t) = -q_{j,j+r}\, a_{j+r}^n(t)\ , \quad t > \tau_{j+r}$$

aufgrund der Basiseigenschaft der Funktionen

$$(t-\tau_j)^{n-1}, \ldots, (t-\tau_{j+n-1})^{n-1}$$

für $r = n$ eindeutig lösbar und für $r < n$ unlösbar.





Theorem: Lokale Basis
Sei T einfach und $\{b_j^n, j = 1 : m\}$ eine Folge von Splines wie oben definiert, dann gilt

$$\sum_j b_j^n(t) p_j \equiv 0 \quad \text{für} \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$$
$$\Leftrightarrow \qquad p_j = 0 \quad \text{für} \quad j = k - n + 1 : k \ .$$

Beweis: Sei $j^* := \min\{j : k - n < j \leq k \wedge p_j \neq 0\}$. Der Spline

$$f(t) := \begin{cases} \sum_{j=j^*}^{k} p_j \, b_j^n(t) & \text{für} \quad t < \tau_k \\ 0 & \text{für} \quad t \geq \tau_k \end{cases}$$

hat nichtleeren Träger in $[\tau_{j^*}, \tau_k]$. Widerspruch.

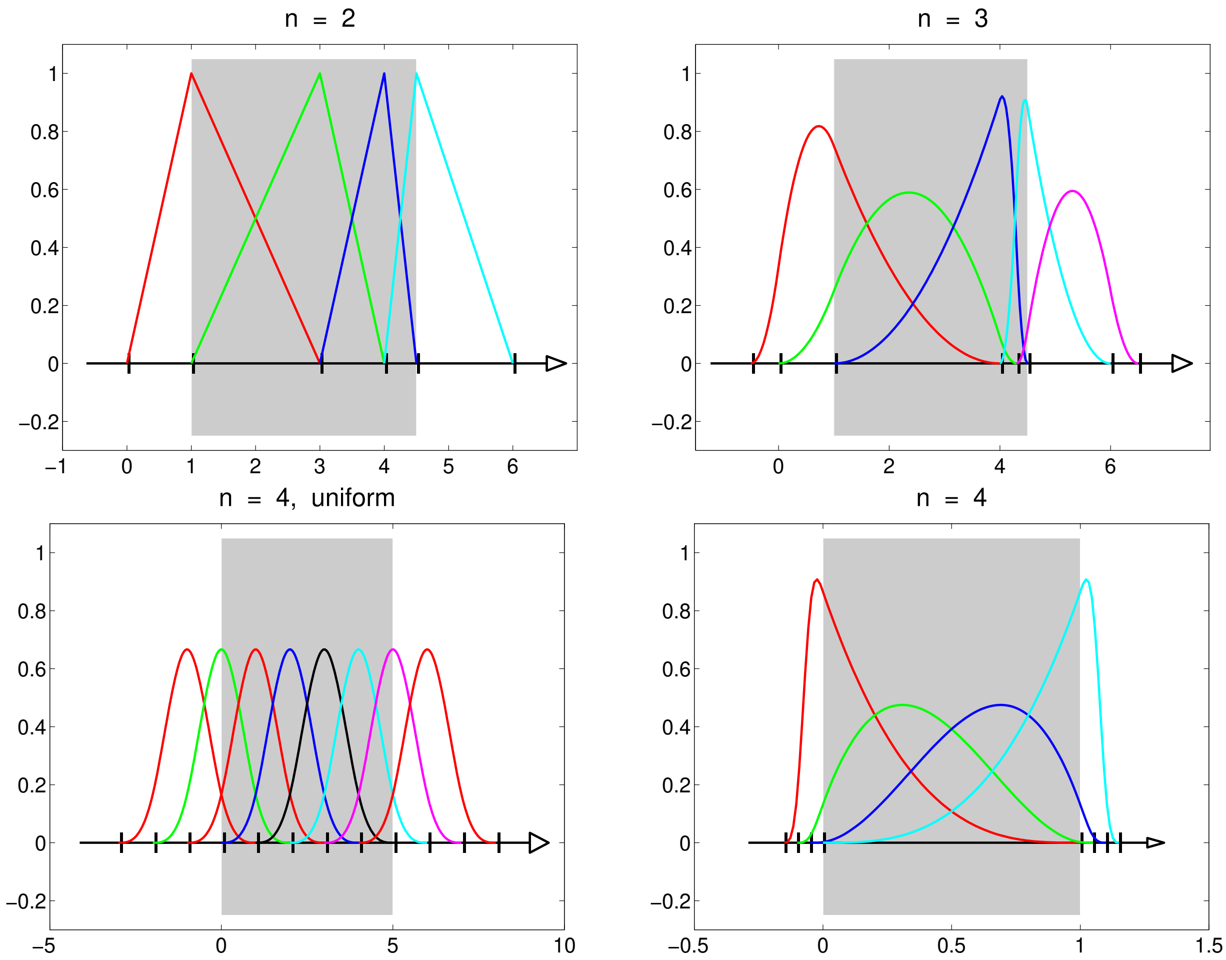
Theorem: Globale Basis
Sei T einfach. Jede Folge $b_1^n, \ldots, b_m^n$ von Splines gemäß der obigen Konstruktion bildet eine Basis des Splineraums $\mathcal{S}_{n,T}(D(T))$.

Durch

$$\sum_{j=1}^{m} b_j^n(t) \equiv 1 \ , \quad t \in D(T) \, ,$$

ist die Basis $\{b_j^n, j = 1 : m\}$ eindeutig bestimmt. Die Basisfunktionen heißen dann *B-Splines*.

Beispiele:



Für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ gibt es Funktionen $\psi_j^n(\tau)$ mit

$$(t-\tau)^{n-1} = \sum_j b_j^n(t)\psi_j^n(\tau)\ , \quad t \in D(T)\ . \qquad (1)$$

Die Funktionen $\psi_j^n(\tau)$ sind Polynome der Ordnung n, da

$$0 = \partial_\tau^n (t-\tau)^{n-1} = \sum_j b_j^n(t)\partial_\tau^n \psi_j^n(\tau)\ ,$$

und folglich $\partial_\tau^n \psi_j^n(\tau) \equiv 0$. Ist speziell $\tau = \tau_k$, dann gibt es eine Konstante p_k mit

$$(t-\tau_k)^{n-1} = b_k^n(t)p_k\ , \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1})\ .$$

Also ist

$$\sum_j b_j^n(t)\psi_j^n(\tau_k) - b_k^n(t)p_k \equiv 0 \ , \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$$

und nach dem Satz „lokale Basis“ gilt $\psi_j^n(\tau_k) = 0$ für $k - n < j < k$, bzw.

$$\psi_j^n(\tau_k) = 0 \quad \text{für} \quad j < k < j + n \ .$$

Es gibt demnach eine Konstante c_j^n mit

$$\psi_j^n(\tau) = c_j^n \, (\tau_{j+1} - \tau) \cdots (\tau_{j+n-1} - \tau) \ .$$

Dividiert man (1) durch $(-\tau)^{n-1}$ und betrachtet den Grenzwert $\tau \to \infty$, dann erhält man

$$1 = \sum_j b_j^n(t) c_j^n \quad \Rightarrow \quad c_j^n = 1 \ .$$

Theorem: Marsden-Identität
Für einfaches T, $t \in D(T)$ und

$$\psi_j^n(\tau) := (\tau_{j+1} - \tau) \cdots (\tau_{j+n-1} - \tau)$$

gilt

$$(t - \tau)^{n-1} = \sum_j b_j^n(t)\psi_j^n(\tau) \ .$$

Übernimmt man die Definition der Funktionen ψ_j^n für beliebiges T, dann sind die Funktionen $\psi_{k-n+1}^n, \ldots, \psi_k^n$ linear unabhängig, sofern $\tau_k < \tau_{k+1}$. Damit kann die Marsden-Identität zur Definition von B-Splines für beliebige Knotenfolgen verwendet werden.

Definition: B-Splines

Sei $T = [\tau_1, \ldots, \tau_{m+n}]$ ein beliebiger Knotenvektor. Die *B-Splines* b_j^n, $j = 1, \ldots, m$ sind definiert durch

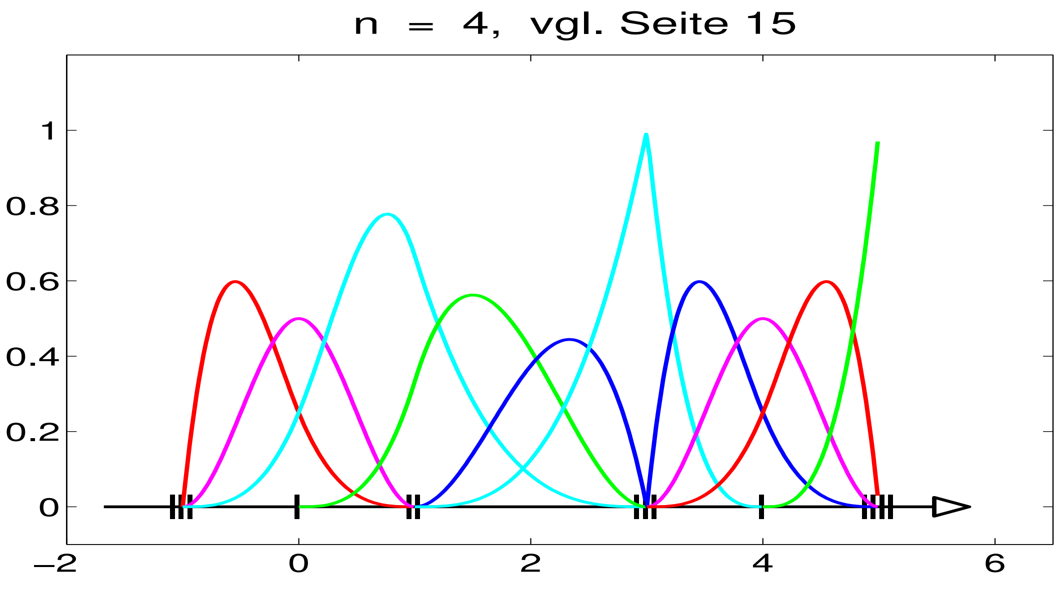
$$\operatorname{supp} b_j^n \subset s_j^n := [\tau_j, \tau_{j+n}]$$

und

$$(t-\tau)^{n-1} = \sum_j b_j^n(t)\psi_j^n(\tau)\,, \quad t \in D(T) = [\tau_n, \tau_{m+1})\ .$$

Bemerkungen:

- Für $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ kann der Summationsindex auf $j = k-n+1 : k$ eingeschränkt werden. Dadurch entsteht ein lineares Gleichungssystem für die Berechnung von b_j^n auf dem Intervall $[\tau_k, \tau_{k+1})$.
- Für $\tau_j = \tau_{j+n}$ ist $b_j^n = 0$.
- Für einfache Knoten stimmt die Definition mit der von Seite 13 überein.



Theorem: Globale Basis
Sei $T = [\tau_1, \ldots, \tau_{m+n}]$ nichtentartet, dann bilden die B-Splines $b_1^n, \ldots, b_m^n$ eine Basis des Splineraums $\mathcal{S}_{n,T}(D(T))$.

Beweis: Es wird gezeigt, dass sich alle abgebrochenen Potenzen a_k^n als Linearkombination von B-Splines darstellen lassen. Da die Anzahl der B-Splines mit der Raumdimension übereinstimmt, folgt die Behauptung.
Sei zunächst $\#k = 0$, dann gilt

$$a_k^n(t) = (t - \tau_k)_+^{n-1} = \sum_{j \geq k} b_j^n(t) \psi_j^n(\tau_k) \ ,$$

da $\psi_j^n(\tau_k) = 0$ für $k - n < j < k$.
Allgemein gilt für $\#k = \ell$:

$$a_k^n(t) = (t - \tau_k)_+^{n-1-\ell} = \frac{(-1)^\ell (n-1-\ell)!}{(n-1)!} \sum_{j \geq k} b_j^n(t) \partial_\tau^\ell \psi_j^n(\tau_k) \ .$$

Dabei verwendet man, dass $\psi_j^n(\tau)$ für $k - n + \ell < j < k$ einen $(\ell + 1)$-fachen Faktor $(\tau_k - \tau)$ besitzt und folglich $\partial_\tau^\ell \psi_j^n(\tau_k) = 0$ ist.

Lokale Basis: Einschränkung der Knotenfolge auf $\tau_{k-n+1}, \ldots, \tau_{k+n}$ zeigt: Die B-Splines bilden eine lokale Basis im Sinne von Seite 13.

Da die Funktionen ψ_j stetig von den Knoten abhängen, hängt auch $b_j^n(t)$ stetig von den Knoten ab, sofern t kein Knoten mit Vielfachheit $\geq n$ ist. Dies ermöglicht es häufig, Eigenschaften für einfache Knoten abzuleiten und durch Grenzübergang auf beliebige Knotenfolgen zu übertragen. Z.B. kann man damit zeigen, dass $b_j^n(t)$ nur von den Knoten $\tau_j, \ldots, \tau_{j+n}$ abhängt.

Partition der Eins: Dividiert man die Marsden-Identität durch $(-\tau)^{n-1}$, dann erhält man für $\tau \to \infty$

$$\sum_j b_j^n(t) \equiv 1 \;, \quad t \in D(T) \;.$$

Definition: Splines in B-Splineform

Ein *Spline in B-Splineform* ist gegeben durch

$$f(t) = \sum_j b_j^n(t) p_j \;.$$

Die Koeffizienten p_j heißen *Kontrollpunkte* (oder auch: de Boor-Punkte, B-Splinekoeffizienten, Steuerpunkte).

Fasst man die B-Splines zu einem Zeilenvektor $B^n := [b_1^n, \ldots, b_m^n]$ zusammen, so erhält man die Darstellung

$$f(t) = B^n P \;.$$

Verwendet man Kontrollpunkte $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^d$, so entsteht eine *Splinekurve* in $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{f}(t) = B^n \mathbf{P} \;.$$

Differenziation von B-Splines: Aus $f \in \mathcal{S}_{n,T}$ folgt $\partial f \in \mathcal{S}_{n-1,T}$. Für die Ableitung eines B-Splines mit einfachen Knoten gilt

$$\operatorname{supp} \partial b_j^n \subset [\tau_j, \tau_{j+n}] \quad \Rightarrow \quad \partial b_j^n = \alpha_j \, b_j^{n-1} + \beta_{j+1} \, b_{j+1}^{n-1} \, .$$

Die Konstanten lassen sich folgendermaßen bestimmen: Zunächst folgt aus der Partition der Eins

$$0 = \partial \sum_j b_j^n(t) = \sum_j \partial b_j^n(t) = \sum_j (\alpha_j + \beta_j) \, b_j^{n-1}(t)$$

und damit $\alpha_j = -\beta_j$. Die Marsden-Identität liefert nun

$$\begin{aligned} (n-1)t^{n-2} &= \sum_j \psi_j^n(0) \, \partial b_j^n(t) \\ &= \sum_j \alpha_j \big(\psi_j^n(0) - \psi_{j-1}^n(0)\big) \, b_j^{n-1}(t) \, . \end{aligned}$$

Vergleich mit

$$(n-1)t^{n-2} = (n-1) \sum_j \psi_j^{n-1}(0) \, b_j^{n-1}(t)$$

ergibt

$$\alpha_j = \frac{(n-1) \, \psi_j^{n-1}(0)}{\psi_j^n(0) - \psi_{j-1}^n(0)} = \frac{n-1}{\tau_{j+n-1} - \tau_j}$$

und schließlich

$$\partial b_j^n = (n-1) \left(\frac{b_j^{n-1}}{|s_j^{n-1}|} - \frac{b_{j+1}^{n-1}}{|s_{j+1}^{n-1}|} \right) \, .$$

Aufgrund der stetigen Abhängigkeit der B-Splines von den Knoten ist diese Gleichung für beliebige Knotenfolgen gültig (sofern an den Knoten eine Ableitung definiert ist). Ist einer der Träger degeneriert, dann wird der entsprechende Summand weggelassen.

Differenziation von Splines: Sei

$$f(t) = \sum_j b_j^n(t) p_j \in \mathcal{S}_{n,T}$$

ein Spline der Ordnung n über T, dann ist

$$\partial f(t) = \sum_j b_j^{n-1}(t) \tilde{p}_j$$

ein Spline der Ordnung $n-1$ über T.
Für die Kontrollpunkte der Ableitung gilt

$$\tilde{p}_j = \frac{(n-1)\,(p_j - p_{j-1})}{|s_j^{n-1}|} \ .$$

Die Knotenfolge der Ableitung kann reduziert werden, wenn nur der Definitionsbereich $D(T)$ betrachtet wird: Zunächst ist der erste und der letzte Knoten überflüssig, außerdem kann ein n-facher Knoten zu einem $(n-1)$-fachen Knoten reduziert werden. Es ist also $\partial f \in \mathcal{S}_{n-1,\partial T}$ mit

$$\begin{aligned} T &= \tau_1, \ldots, \tau_k \$ n, \ldots, \tau_{m+n} \\ \partial T &= \tau_2, \ldots, \tau_k \$ (n-1), \ldots, \tau_{m+n-1} \end{aligned}$$

Wenn T nicht entartet ist, dann ist auch ∂T nicht entartet.

Integration: Zur Integration eines Splines muss die Knotenfolge erweitert werden, beispielsweise durch Verdopplung des ersten und letzten Knotens:

$$\partial^{-1}T = \tau_1, \tau_1, \ldots, \tau_{m+n}, \tau_{m+n} \; .$$

Es gilt

$$\partial^{-1}b_j^n(t) := \int_{-\infty}^t b_j^n(\tau)\, d\tau = \frac{|s_j^n|}{n} \sum_{k\geq j} b_k^{n+1}(t)$$

und insbesondere

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_j^n(\tau)\, d\tau = \frac{|s_j^n|}{n} \; .$$

Formel für Spline $\partial^{-1}f(t)$ als Übung.

Rekursion: Es gilt

$$(t-\tau)^n = \sum_j b_j^{n+1}(t)\psi_j^{n+1}(\tau) = (t-\tau) \sum_j b_j^n(t)\psi_j^n(\tau) \; .$$

Substitution der Bézierdarstellung

$$(t-\tau) = \frac{(\tau_{j+n}-\tau)(t-\tau_j) + (\tau_j - \tau)(\tau_{j+n}-t)}{|s_j^n|}$$

ergibt

$$\begin{aligned}(t-\tau)^n &= \sum_j \left(\psi_j^{n+1}(\tau)(t-\tau_j) + \psi_{j-1}^{n+1}(\tau)(\tau_{j+n}-t)\right) \frac{b_j^n(t)}{|s_j^n|} \\ &= \sum_j \psi_j^{n+1}(\tau) \left(\frac{t-\tau_j}{|s_j^n|}\, b_j^n(t) + \frac{\tau_{j+n+1}-t}{|s_{j+1}^n|}\, b_{j+1}^n(t) \right).\end{aligned}$$

Theorem: Rekursion

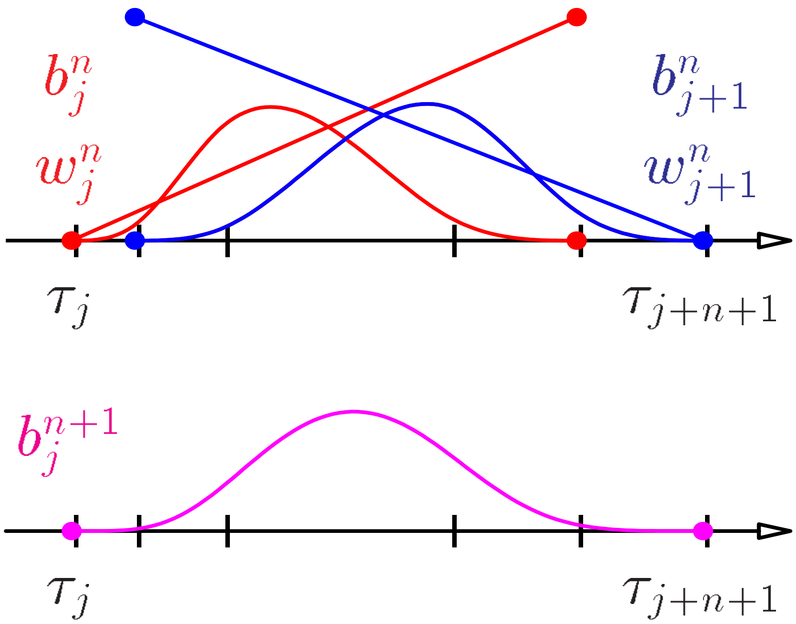
Mit

$$w_j^n(t) := \frac{t-\tau_j}{|s_j^n|}$$

gilt die Rekursionsformel

$$b_j^1 = \chi\big([\tau_j, \tau_{j+1})\big)$$
$$b_j^{n+1} = w_j^n\, b_j^n + (1 - w_{j+1}^n)\, b_{j+1}^n \,.$$

Summanden mit leerem Träger werden weggelassen.



Da alle Gewichte w_j^n auf s_j^n nichtnegativ sind, folgt:

Theorem: Partition der Eins

Die B-Splines $b_1^n, \ldots, b_m^n$ bilden eine nichtnegative Partition der Eins auf dem Intervall $D(T)$.

Für einen Spline $f(t) = \sum_j b_j^n(t)p_j$ gilt

$$f(t) = \sum_j b_j^{n-1}(t)\big(w_j^{n-1}(t)p_j + (1 - w_j^{n-1}(t))p_{j-1}\big) \ .$$

Halte $t = t_0$ fest, dann stimmen die Splines $f(t)$ und

$$\tilde{f}(t) := \sum_j b_j^{n-1}(t)\big(w_j^{n-1}(t_0)p_j + (1 - w_j^{n-1}(t_0))p_{j-1}\big)$$

an der Stelle $t = t_0$ überein.

- $\tilde{f}(t) = \sum_j \tilde{p}_j \, b_j^{n-1}(t)$ ist ein Spline der Ordnung $n - 1$ über T.
- Die neuen Kontrollpunkte

  $$\tilde{p}_j := w_j^{n-1}(t_0)p_j + (1 - w_j^{n-1}(t_0))p_{j-1}$$

  sind Konvexkombinationen der alten Kontrollpunkte.
- Ist $t_0 \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, dann sind für den Spline f die Kontrollpunkte $p_{k-n+1}, \ldots, p_k$ relevant; für den Spline $\tilde{f}$ sind die Kontrollpunkte $\tilde{p}_{k-n+2}, \ldots, \tilde{p}_k$ relevant;
- Iteration ergibt ein Dreiecksschema analog zum de Casteljau-Algorithmus.

de Boor-Algorithmus: Auswertung des Splines $\mathbf{f}(t) = \sum_j b_j^n(t)\mathbf{p}_j$ der Ordnung n über T an der Stelle $t = t_0 \in D(T)$.

- Bestimme Index k so, dass $t_0 \in [\tau_k, \tau_{k+1})$.
- Initialisiere Dreiecksschema mit den Kontrollpunkten $\mathbf{p}^{(n)} := [\mathbf{p}_{k-n+1}, \ldots, \mathbf{p}_k]$.
- Berechne rekursiv das Dreiecksschema

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{p}_{k-n+1}^{(n)} & \searrow & & & & & & & \\
\mathbf{p}_{k-n+2}^{(n)} & \overrightarrow{\searrow} & \mathbf{p}_{k-n+2}^{(n-1)} & \searrow & & & & & \\
\mathbf{p}_{k-n+3}^{(n)} & \overrightarrow{\searrow} & \mathbf{p}_{k-n+3}^{(n-1)} & \overrightarrow{\searrow} & \mathbf{p}_{k-n+3}^{(n-2)} & \searrow & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \\
\mathbf{p}_{k}^{(n)} & \longrightarrow & \mathbf{p}_{k}^{(n-1)} & \longrightarrow & \mathbf{p}_{k}^{(n-2)} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{p}_{k}^{(1)}
\end{array}$$

  Zur Berechnung des Punktes $\mathbf{p}_j^{(\nu)}$ verwendet man das Gewicht

$$w_j^\nu(t_0) = \frac{t_0 - \tau_j}{|s_j^\nu|}\ .$$

  Der Pfeil $\longrightarrow$ steht für Multiplikation mit $w_j^\nu(t_0)$.

  Der Pfeil $\searrow$ steht für Multiplikation mit $(1 - w_j^\nu(t_0))$.

  Der Spline $\mathbf{f}^{(\nu)}(t) := \sum_j \mathbf{p}_j^{(\nu)} b_j^\nu(t)$ der Ordnung ν stimmt mit $\mathbf{f}(t)$ and der Stelle $t = t_0$ überein.

- Der gesuchte Wert ist $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{p}_k^{(1)}$.

Beispiel: $n = 4,\ t_0 = 2$

$$T = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5$$
$$p = -2,\ 16,\ 4,\ 0,\ 8,\ -1$$

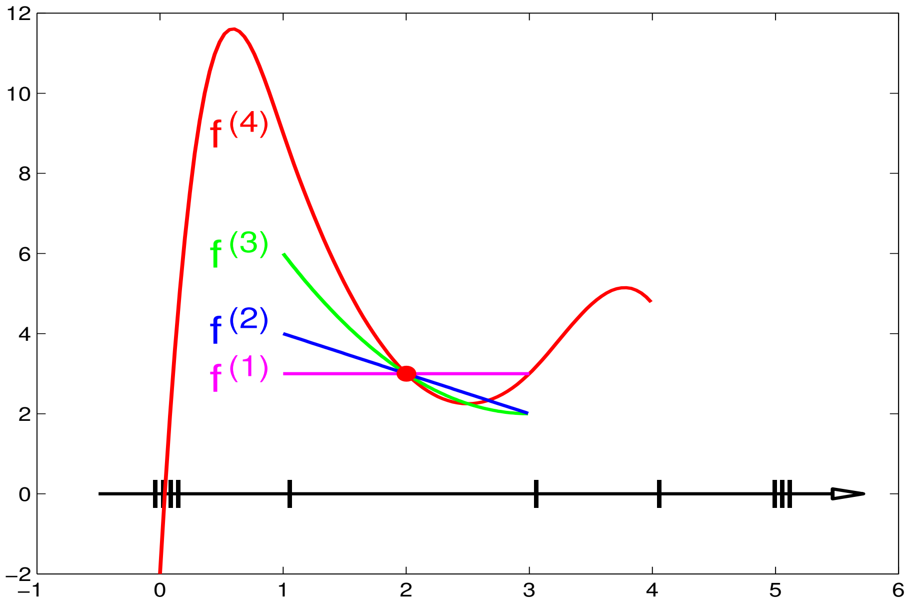
- Es gilt $2 \in [1, 3) \ \Rightarrow k = 5.$

- Die relevanten Kontrollpunkte sind $p^{(4)} = 16,\ 4,\ 0,\ 8.$

- Das Dreiecksschema ist

$$\begin{array}{cccc} 16 & & & \\ 4 & 8 & & \\ 0 & 2 & 4 & \\ 8 & 2 & 2 & 3 \end{array}$$

- Der gesuchte Funktionswert ist $f(2) = 3.$



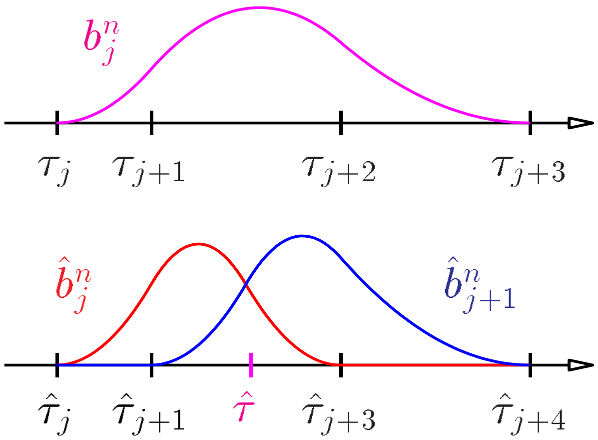
Knoteneinfügen: Sei $\hat{T}$ die Knotenfolge, die entsteht, wenn in T der Knoten $\hat{\tau} \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ eingefügt wird,

$$\hat{\tau}_j := \begin{cases} \tau_j & \text{für } j \leq k \\ \hat{\tau} & \text{für } j = k+1 \\ \tau_{j-1} & \text{für } j > k+1 \,. \end{cases}$$

Seien $\hat{b}_j^n$ die B-Splines über $\hat{T}$, dann gilt wegen $\mathcal{S}_{n,T} \subset \mathcal{S}_{n,\hat{T}}$

$$b_j^n = \begin{cases} \hat{b}_j^n & \text{für } j \leq k-n \\ \alpha_j \hat{b}_j^n + \beta_j \hat{b}_{j+1}^n & \text{für } k-n < j \leq k \\ \hat{b}_{j+1}^n & \text{für } j > k \,. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Konstanten α_j, β_j sei zunächst wieder T einfach, das allgemeine Resultat folgt dann aus Stetigkeitsgründen.



Für $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$ gilt (siehe Seite 17)

$$b_j^n(t) = a_j^n(t)/\Psi_j^n(\tau_j)\,,\ \hat{b}_j^n(t) = a_j^n(t)/\hat{\Psi}_j^n(\hat{\tau}_j)\,,\ \hat{b}_{j+1}^n(t) = 0\,.$$

Daraus folgt für α_j (und analog auch für β_j)

$$\alpha_j = \frac{\hat{\tau} - \hat{\tau}_j}{\hat{\tau}_{j+n} - \hat{\tau}_j} = \hat{w}_j^n(\hat{\tau})\,, \quad \beta_j = 1 - \hat{w}_{j+1}^n(\hat{\tau})\,.$$

Für einen Spline $f(t) = \sum_j b_j^n(t) p_j$ ist

$$f(t) = \sum_{j \le k-n} b_j^n(t) p_j + \sum_{j>k} b_j^n(t) p_j + \sum_{j=k-n+1}^{k} b_j^n(t) p_j$$

$$= \sum_{j \le k-n} \hat{b}_j^n(t) p_j + \sum_{j>k+1} \hat{b}_j^n(t) p_{j-1}$$

$$+ \sum_{j=k-n+1}^{k} \big(\hat{w}_j^n(\hat{\tau})\, \hat{b}_j^n(t) + (1 - \hat{w}_{j+1}^n(\hat{\tau}))\, \hat{b}_{j+1}^n(t)\big) p_j \ .$$

Es gilt

$$\hat{w}_j^n(\hat{\tau}) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k-n+1 \\ w_j^{n-1}(\hat{\tau}) & \text{für } k-n+1 < j \le k \\ 0 & \text{für } j = k+1 \end{cases}$$

und damit

$$f(t) = \sum_{j \le k-n+1} \hat{b}_j^n(t) p_j + \sum_{j>k} \hat{b}_j^n(t) p_{j-1}$$

$$+ \sum_{j=k-n+2}^{k} \hat{b}_j^n(t) \big(w_j^{n-1}(\hat{\tau})\, p_j + (1 - w_j^{n-1}(\hat{\tau}))\, p_{j-1}\big) \ .$$

Die neuen Kontrollpunkte stehen also in der zweiten Spalte des de Boor-Dreiecks zur Auswertung von f an der Stelle $t = \hat{\tau}$.

Iteration ergibt: Der de Boor-Algorithmus zur Auswertung von f an der Stelle $t = \hat{\tau}$ entspricht dem Einfügen eines $(n-1)$-fachen Knotens $\hat{\tau}$. Insbesondere gilt

$$\#j = n-2 \ \Rightarrow \ f(\tau_j) = p_{j-1} \ .$$

Beispiel: siehe Seite 25

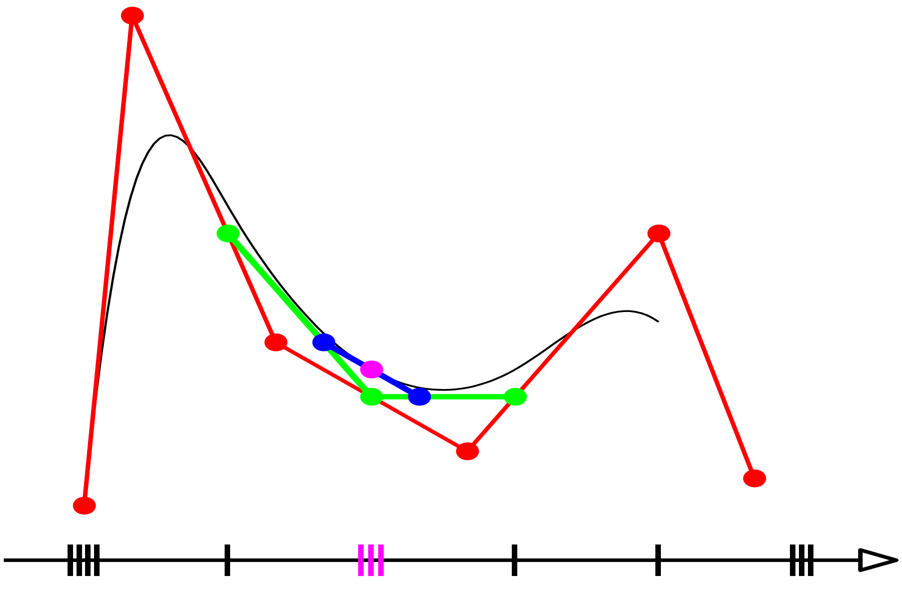
$$T = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5$$
$$p = -2,\ 16,\ 4,\ 0,\ 8,\ -1$$

$$\longmapsto\ T = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5$$
$$p = -2,\ 16,\ 8,\ 2,\ 2,\ 8,\ -1$$

$$\longmapsto\ T = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5$$
$$p = -2,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 2,\ 8,\ -1$$

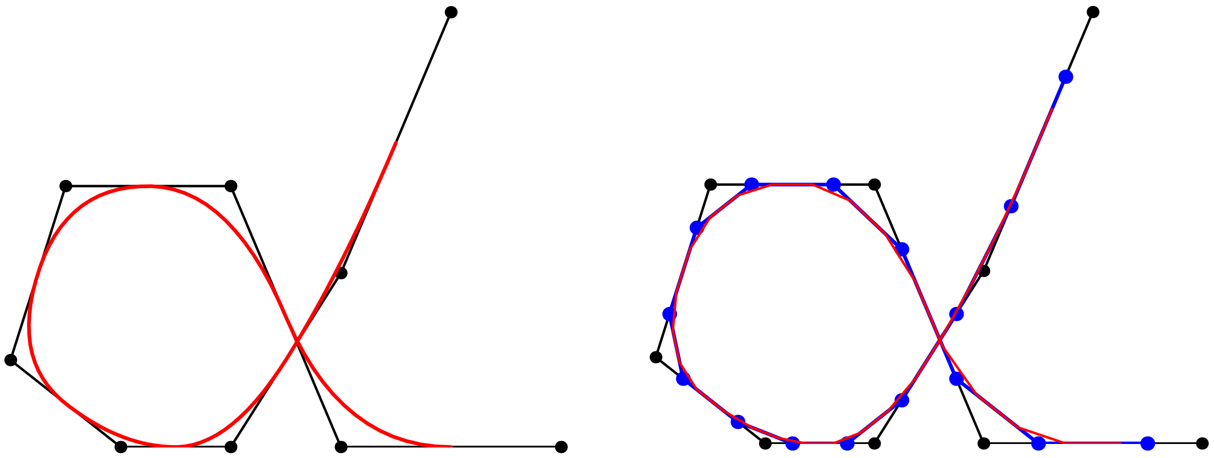
$$\longmapsto\ T = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5$$
$$p = -2,\ 16,\ 8,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 8,\ -1$$

$$\begin{array}{c} -2 \\ 16 \\ 4 \\ 0 \\ 8 \\ -1 \end{array} \longmapsto \begin{array}{cc} -2 & \\ 16 & \\ 4 & 8 \\ 0 & 2 \\ 8 & 2 \\ -1 & \end{array} \longmapsto \begin{array}{ccc} -2 & & \\ 16 & & \\ 4 & 8 & \\ 0 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \\ -1 & & \end{array} \longmapsto \begin{array}{cccc} -2 & & & \\ 16 & & & \\ 4 & 8 & & \\ 0 & 2 & 4 & \\ 8 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & & & \end{array}$$



Konvergenz: Wiederholt man das Knoteneinfügen so, dass der maximale Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten klein wird, so konvergiert die Folge der erzeugten Kontrollpolygone rasch gegen die definierte Splinekurve.

Beispiel: $n = 3$, uniforme Knotenfolge, füge jeweils in die Mitte zwischen zwei Knoten einen neuen Knoten ein.



Knotenentfernen Das Enfernen von Knoten ist im Allgemeinen nur näherungsweise möglich. Man kann analog zur Gradreduktion bei Bézierkurven vorgehen. Soll ein Knoten τ_j entfernt weden, dann bestimmt man die neuen Kontrollpunkte $\tilde{\mathbf{p}}$ bezüglich der reduzierten Knotenfolge $\tilde{T}$ so, dass Einfügen von τ_j in $\tilde{T}$ eine minimale Abweichung von den ursprünglich gegebenen Kontrollpunkten erzeugt.
Ist I die $(n+1) \times n$-Matrix, die das Einfügen von τ_j für die relevanten Knotrollpunkte beschreibt, dann ist die $n \times (n+1)$-Matrix R für das Entfernen von τ_j gegeben durch

$$R := (I^{\mathrm{t}} I)^{-1} I^{\mathrm{t}}.$$

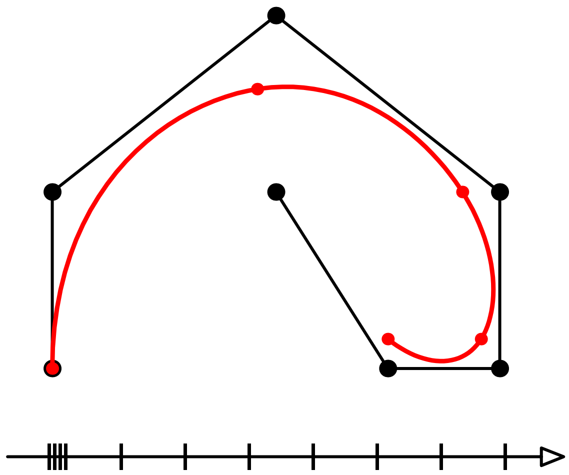
Geometrie von Splinekurven

Eine *B-Splinekurve* in $\mathbb{R}^d$ hat die Form

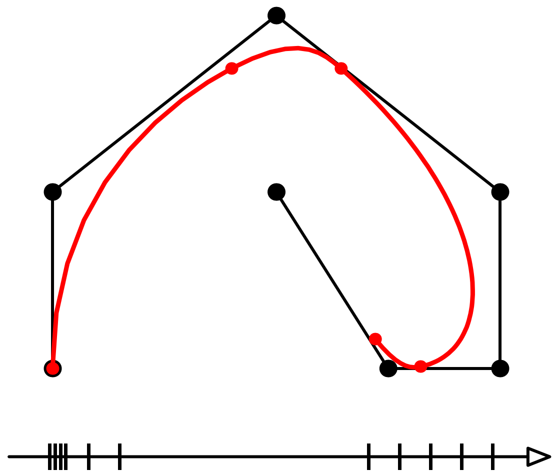
$$\mathbf{f}(t) = \sum_j b_j^n(t)\mathbf{p}_j = B^n(t)\mathbf{P} \quad \mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^d\,.$$

Das Kontrollpolygon $\mathbf{p}$ von $\mathbf{f}$ ist die stückweise geradlinige Verbindung der Kontrollpunkte.

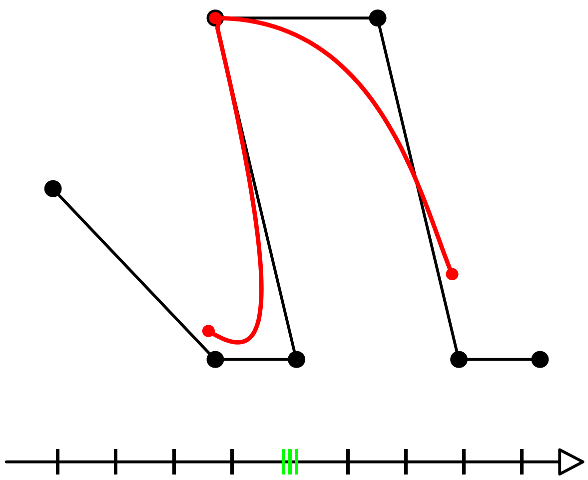
n = 4



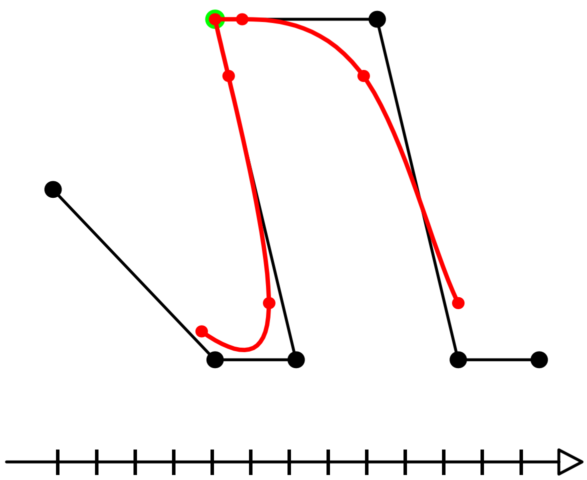
n = 4



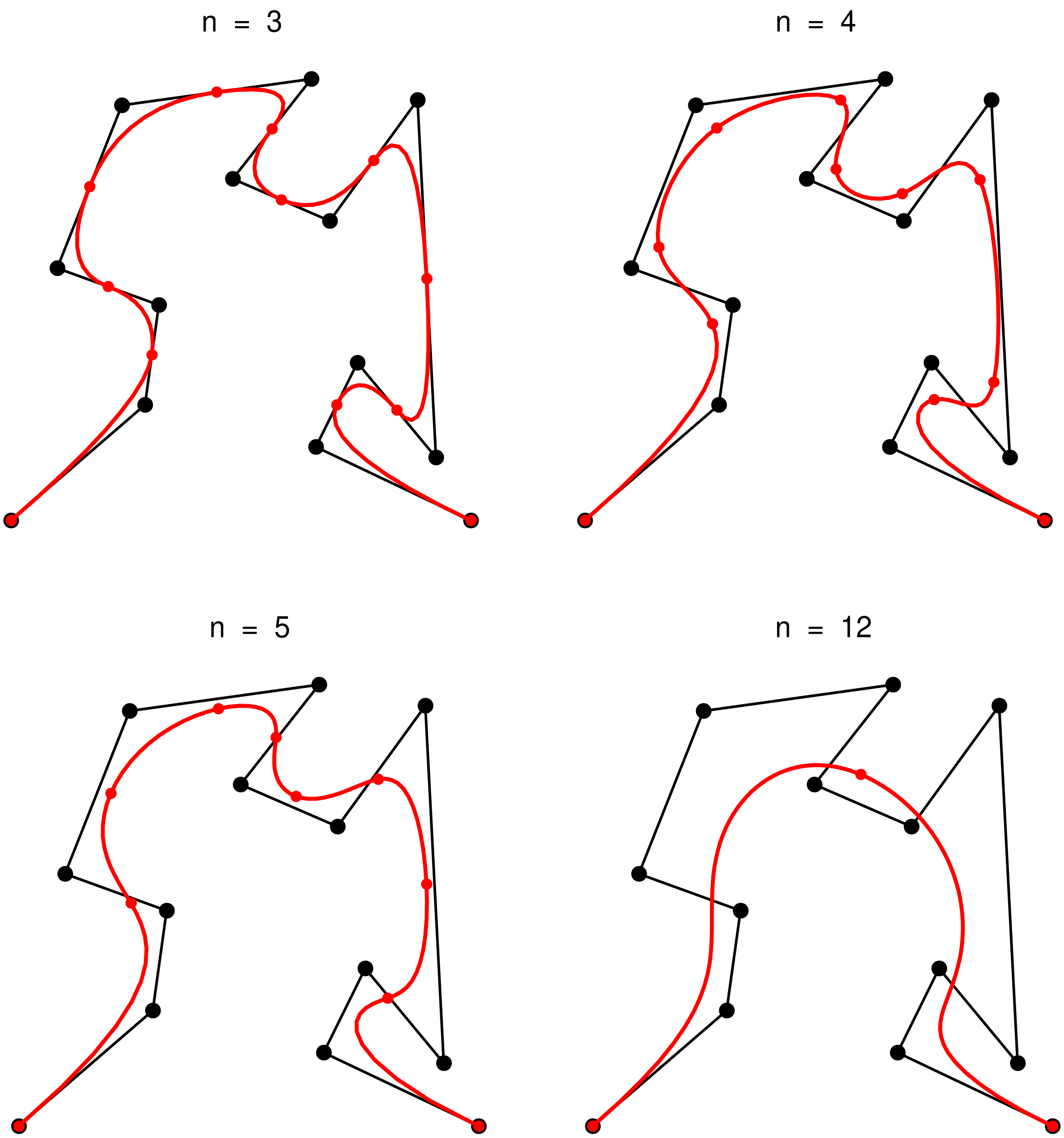
n = 4, dreifacher Knoten



n = 4, dreifacher Kontrollpunkt



Wachsender Grad bei gleichbleibendem Kontrollpolygon bewirkt eine zunehmende Glättung der Splinekurve. Im Beispiel ist der erste und letzte Knoten jeweils n-fach, dazwischen ist die Unterteilung äquidistant.



Da B-Splines eine nicht-negative Partition der Eins bilden, haben B-Splinekurven unter anderem folgende Eigenschaften:

- **Konvexe Hülle** Die B-Splinekurve liegt in der konvexen Hülle des Kontrollpolygons,

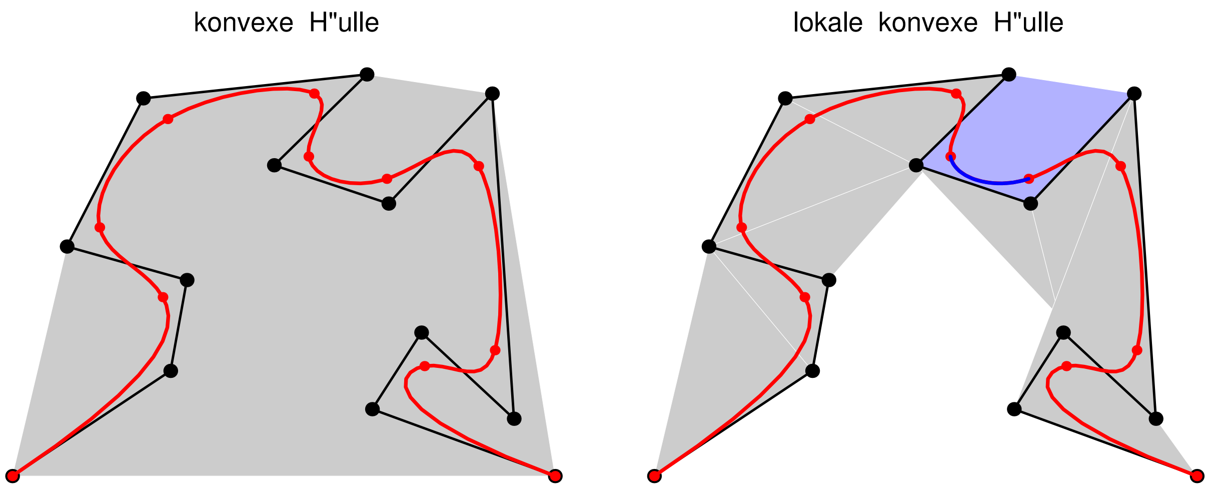
$$\mathbf{f}(t) \in \mathrm{conv}(\mathbf{P}) \ , \quad t \in D(T) \ .$$

- **Lokale konvexe Hülle** Das Segment $\mathbf{f}([\tau_k, \tau_{k+1}))$ einer B-Splinekurve liegt in der konvexen Hülle der relevanten Kontrollpunkte,

$$\mathbf{f}(t) \in \mathrm{conv}(\mathbf{p}_{k-n+1}, \ldots, \mathbf{p}_k) \ , \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \ .$$

- **Affine Invarianz** Die affine Abbildung der Kurve entspricht der affinen Abbildung der Kontrollpunkte,

$$A\mathbf{f}(t) + \mathbf{a} = \sum_j b_j^n(t)(A\mathbf{p}_j + \mathbf{a}) \ .$$



Lineare Präzision: Die *Greville-Abszissen* ("Mittel der inneren Knoten") sind definiert durch

$$\mu_j := (\tau_{j+1} + \cdots + \tau_{j+n-1})/(n-1) .$$

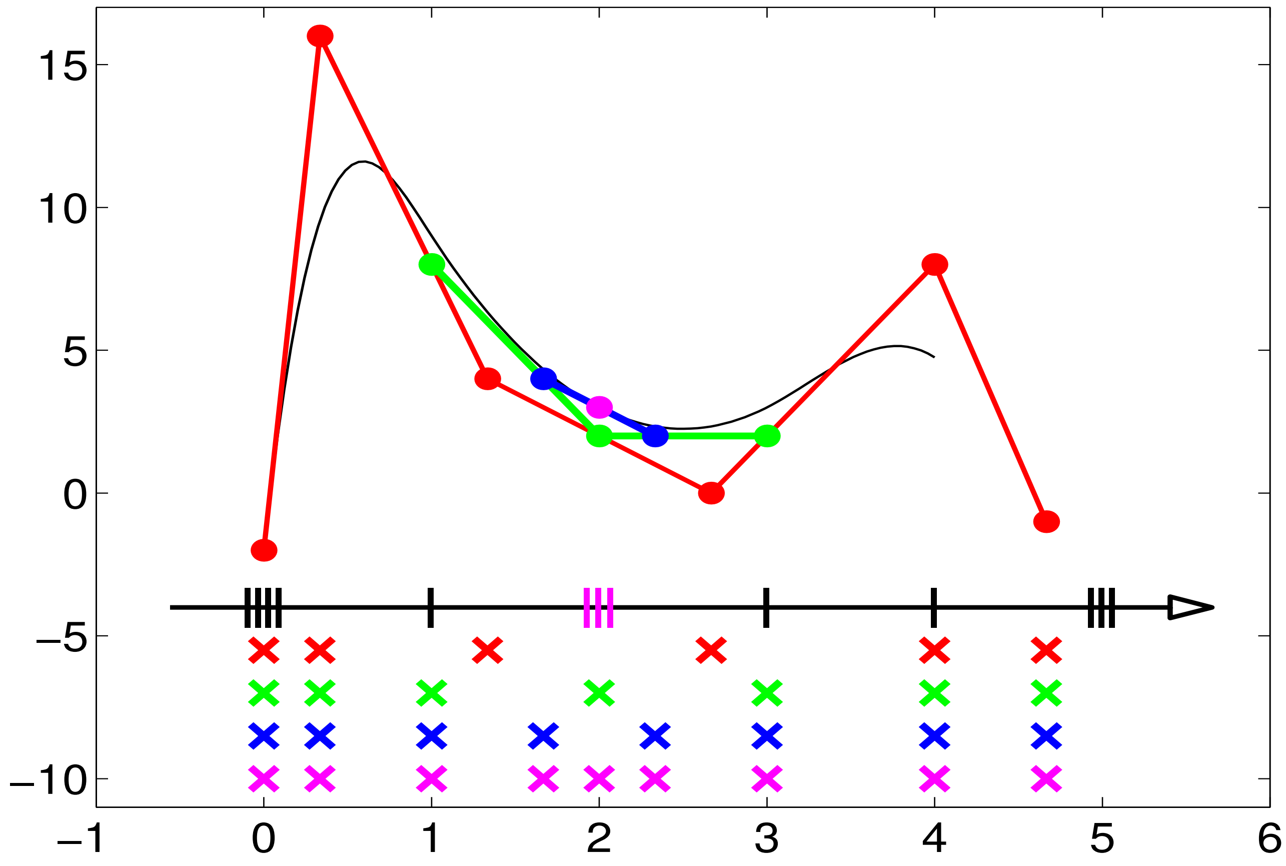
Damit gilt (siehe Aufgabe 3):

$$t = \sum_j b_j^n(t)\mu_j .$$

Skalare Kontrollpolygone: Im skalaren Fall $d = 1$ identifiziert man die Funktion $f(t)$ mit der Kurve $[t, f(t)]$,

$$f(t) = \sum_j b_j^n(t)p_j \longmapsto [t, \sum_j b_j^n(t)p_j] = \sum_j b_j^n(t)[\mu_j, p_j] .$$

Beispiel: Skalares Kontrollpolygon, de Boor-Algorithmus, siehe Seite 25.



Abstand Spline–Kontrollpolygon

Das arithmentische Mittel und die (empirische) Varianz von jeweils $(n-1)$ aufeinanderfolgenden Knoten werden bezeichnet mit

$$\mu_j = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\tau_{j+k}, \quad \sigma_j^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}(\tau_{j+k}-\mu_j)^2.$$

Damit gilt (vgl. Aufgabe 1)

$$t = \sum_j b_j^n(t)\mu_j, \quad t^2 = \sum_j b_j^n(t)(\mu_j^2 - \sigma_j^2/(n-1)).$$

Das Kontrollpolygon h ist ein stückweise linearer Spline mit Knoten μ_j,

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j^n(t)p_j, \quad T = [\tau_1, \ldots, \tau_{n+m}]$$

$$h(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j^2(t)p_j, \quad T' = [\mu_1, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \mu_m].$$

Vektorschreibweise:

$$f = B^n P,\ h = HP,\ d := D^n P := (B^n - H)P.$$

Die Ableitungen von f sind

$$\partial^1 f =: B^{n-1}\Delta^1 P, \quad \partial^2 f =: B^{n-2}\Delta^2 P.$$

$\Delta^1 P$ enthält die Steigungen des Kontrollpolygons. Wenn $\Delta^2 P \geq 0$, dann ist das Kontrollpolygon h konvex.

Gesucht ist eine Abschäztung der Form

$$|d(t)| \le \alpha(t)\|\Delta^2 P\|_\infty, \quad t \in [\mu_k, \mu_{k+1})$$

mit einer möglichst kleinen Konstanten $\alpha(t)$. Wegen der linearen Präzision gilt für beliebige fest gewählte P_k^*, P_{k+1}^*

$$\alpha(t) = \max\{d(t) : P_k = P_k^* \wedge P_{k+1} = P_{k+1}^* \wedge \|\Delta^2 P\|_\infty = 1\}.$$

$d(t)$ ist maximal, wenn alle zweiten Differenzen $\Delta_j^2 P$ maximal sind (Konvexitätsargument), also für Kontrollpunkte P^* mit

$$\Delta^2 P^* = 1 \;\Rightarrow\; B^n(t)P^* = t^2/2.$$

Daraus folgt

$$P_j^* = \frac{\mu_j^2}{2} - \frac{\sigma_j^2}{2(n-1)}$$

und

$$|D^n(t)P| \le D^n(t)P^*\|\Delta^2 P\|_\infty.$$

Gleichheit gilt, wenn $B^n P$ ein quadratisches Polynom ist. $D^n P^*$ ist eine stückweise konvexe Funktion und nimmt deshalb ihr Maximum an einem der Knoten μ_j an,

$$D^n(\mu_j)P^* = \frac{\sigma_j^2}{2(n-1)}, \quad t \in [\mu_1, \mu_m].$$

Es ist damit

$$\|D^n P\|_\infty \le \frac{\max_j \sigma_j^2}{2(n-1)} \|\Delta^2 P\|_\infty \le \frac{\max_j |s_j^n|^2}{8(n-2)} \|\Delta^2 P\|_\infty.$$

Entsteht $B^n P$ aus $B_0^n P_0$ durch Knoteneinfügen, dann gilt

$$\|D^n P\|_\infty \le \frac{\max_j \sigma_j^2}{2(n-1)} \|\Delta^2 P_0\|_\infty \le \frac{\max_j |s_j^n|^2}{8(n-2)} \|\Delta^2 P_0\|_\infty.$$

2. Interpolation

Gegeben ist eine monotone Folge von *Stützstellen*

$$U := u_1, \ldots, u_m$$

und zugehörige Funktionswerte

$$G := g_1, \ldots, g_m.$$

Gesucht ist eine Funktion f, die die Daten interpoliert. Für einfache Stützstellen soll also

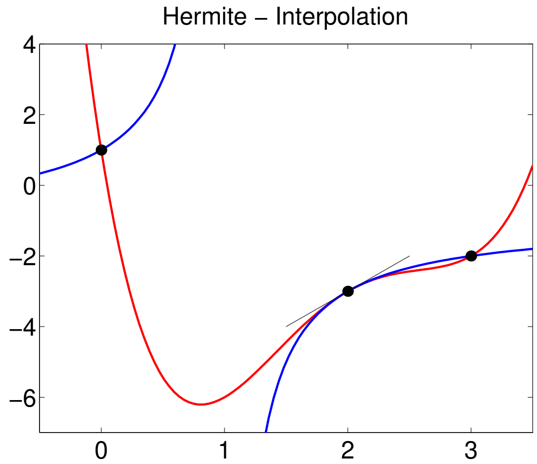
$$f(u_j) = g_j, \quad j = 1, \ldots, m$$

gelten. Für den allgemeinen Fall mehrfacher Stützstellen ("Hermite-Interpolation") fordert man

$$\partial^{\#j} f(u_j) = g_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Beispiel:

$$U = 0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3$$
$$G = 1,\ -4,\ 2,\ -3,\ -2$$
$$f(t) = 1 - 22t + 22t^2 - 8t^3 + t^4$$
$$f(t) = \frac{1+t}{1-t}$$



Es ist zweckmäßig, einen *linearen* Funktionenraum L als Grundmenge zur Lösung eines Interpolationsproblems zu verwenden.

Theorem: Lösbarkeit
Betrachte das Interpolationsproblem

$$\partial^{\#j} f(u_j) = g_j,\ j = 1, \ldots, m,\ f \in L \qquad (2)$$

für eine feste Stützstellenfolge U. Notwendig für die *Existenz und Eindeutigkeit* einer Lösung für beliebige Daten G ist

$$\dim L = m.$$

Wenn $\dim L = m$ gilt, dann ist

$$G = 0 \ \Rightarrow f = 0$$

notwendig und hinreichend für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für beliebige Daten G.

Beweis: Sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell\}$ eine Basis von L und

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\ell} f_k \, \varphi_k(t).$$

Das Interpolationsproblem (2) hat dann die Form

$$AF = G,$$

wobei $F = [f_0; \ldots; f_\ell]$ die gesuchten Koeffizienten sind und die $(m \times \ell)$-Matrix A gegeben ist durch

$$A_{j,k} = \partial^{\#j} \varphi_k(u_j)\ .$$

A heißt *Interpolationsmatrix*. Für die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems ist notwendig, dass A quadratisch ist, also $m = \ell$. Ist dies der Fall, dann ist notwendig und hinreichend für die Invertierbarkeit, dass A einen trivialen Kern hat.

Beispiele:

a) Der Raum der Polynome der Ordnung m, $L = \mathbb{P}_m$, ist linear und hat Dimension m. Da ein von Null verschiedenes Polynom der Ordnung m weniger als m Nullstellen hat, ist das Interpolationsproblem für m Stützstellen eindeutig lösbar. Die Lösung lässt sich mit dem Newtonschema einfach berechnen, insbesondere für großes m treten aber Stabilitätsprobleme auf.

b) Die Taylorentwicklung der Ordnung m einer Funktion g im Punkt u erhält man als Spezialfall $L = \mathbb{P}_m$, $U = u\$m$.

c) Sei $L = \mathrm{span}(1, t^2, t^4)$ der Raum der geraden Polynome der Ordnung 5. Dann ist das Interpolationsproblem

$$U = -1,\, 0,\, 1, \quad G = g_1,\, g_2,\, g_3$$

nur lösbar, wenn $g_1 = g_3$. Wenn eine Lösung existiert, ist diese nicht eindeutig, da $f(t) = t^2 - t^4$ an allen Stützstellen verschwindet.

d) Betrachte den Raum $L = \mathcal{S}_{4,T}$ der kubischen Splines über der nichtentarteten Knotenfolge $T = \tau_1, \ldots, \tau_{4+m}$. Es gilt $\dim \mathcal{S}_{4,T} = m$. Das Interpolationsproblem für m Stützstellen ist eindeutig lösbar beispielsweise für

$$U = \tau_4\$2,\, \tau_5, \ldots, \tau_m,\, \tau_{m+1}\$2\,.$$

Dagegen gibt es im Allgemeinen keine Lösung für

$$U = \tau_4\$4,\, \tau_5, \ldots, \tau_m\,.$$

Theorem: Kanonischer kubischer Splineinterpolant

Unter allen zweimal stetig differenzierbaren Lösungen des Interpolationsproblems (U, G) mit

$$U = u_1\$2, u_2, \ldots, u_{M-1}, u_M\$2, \quad u_i \neq u_j,$$

minimiert der *kanonische kubische Splineinterpolant* mit Knoten $T = u_1\$4, u_2, \ldots, u_{M-1}, u_M\$4$ das Funktional

$$J(f) := \int_U (f''(t))^2 \, dt, \quad U := [u_1, u_M].$$

Beweis: Sei f der kanonische kubische Splineinterpolant und p eine beliebige andere zweimal stetig differenzierbare Lösung des Interpolationsproblems. Die Differenz $d := p - f$ verschwindet also an allen Stützstellen, außerdem ist $d'(u_1) = d'(u_M) = 0$. Nun ist

$$\int_U f'' d'' = f'' d' \Big|_{u_1}^{u_M} - \int_U f''' d'.$$

Die Randterme verschwinden, außerdem ist f''' auf den Teilintervallen konstant,

$$\int_U f'' d'' = -\int_U f''' d' = -\sum_{j=1}^{M-1} f'''(u_j) \int_{u_j}^{u_{j+1}} d' = 0.$$

Daraus folgt

$$\int_U (p'')^2 = \int_U (f'' + d'')^2 = \int_U (f'')^2 + \int_U (d'')^2 \geq \int_U (f'')^2.$$

Theorem: Natürlicher kubischer Splineinterpolant
Unter allen zweimal stetig differenzierbaren Lösungen des Interpolationsproblems (U, G) mit einfachem $U = u_1, \ldots, u_M$ minimiert der *natürliche kubische Splineinterpolant* mit Knoten $T = u_1\$4, u_2, \ldots, u_{M-1}, u_M\$4$ und

$$f''(u_1) = f''(u_M) = 0$$

das Funktional

$$J(f) := \int_U (f''(t))^2 \, dt, \quad U := [u_1, u_M].$$

Theorem: Natürlicher Splineinterpolant der Ordnung n
Sei $n = 2k$. Unter allen $(n-2)$mal stetig differenzierbaren Lösungen des Interpolationsproblems (U, G) mit einfachem $U = u_1, \ldots, u_M$ minimiert der *natürliche Splineinterpolant der Ordnung* n mit Knoten $T = u_1\$n, u_2, \ldots, u_{M-1}, u_M\$n$ und

$$\partial^\ell f(u_1) = \partial^\ell (u_M) = 0, \quad \ell = k, \ldots, n-2,$$

das Funktional

$$J(f) := \int_U (\partial^k f(t))^2 \, dt.$$

Bezeichne $z(f)$ die Anzahl der Nullstellen eines Splines f im Intervall $I := \{t : \sum_j b_j^n(t) \neq 0\}$. Dabei wird die Vielfachheit einer Nullstelle durch die Polynome p_i der halboffenen Segmente $[\tau_i, \tau_{i+1})$ definiert.

Theorem: Nullstellen von Splines
Habe $T = \tau_1, \ldots, \tau_{n+m}$ höchstens n-fache Knoten und sei $f \in \mathcal{S}_{n,T}$ ein Spline mit $z(f) \geq m$. Dann gibt es ein Segment $[\tau_k, \tau_{k+1})$, auf dem f verschwindet.

Beweis per vollständiger Induktion für die Paare (n, m):
Anfang: Der Satz gilt für alle Paare $(1, m)$ und $(n, 1)$.
Annahme: Der Satz gelte für alle Paare (n', m') mit $n' < n$ oder $n' = n, m' < m$.
Schluss: Es werden folgende Fälle unterschieden:
i) Es gibt einen inneren $(n-1)$-fachen Knoten τ_i, also $1 < i < n + m$. Spalte T in zwei Knotenfolgen

$$\begin{aligned} T_\ell &:= \tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_i\$n \\ T_r &:= \tau_i\$n, \tau_{i+n-1}, \ldots, \tau_{n+m} \end{aligned}$$

und analog f in die Splines f_ℓ, f_r. Es gilt $z(f_\ell) + z(f_r) = z(f)$ und für die Dimensionen $m_\ell + m_r = m + 1$. Also ist $z(f_\ell) \geq m_\ell$ oder $z(f_r) \geq m_r$. Falls $m_\ell, m_r < m$, dann folgt die Behauptung aus der Induktionsannahme. Falls $m_\ell = m, m_r = 1$ oder $m_\ell = 1, m_r = m$, dann hat man auf einem Teilraum einen n-fachen Randknoten, der unter *iii)* behandelt wird.
ii) Es gibt einen inneren n-fachen Knoten τ_i. Der Beweis verläuft analog zu *i)*.

iii) Anderenfalls ist f differenzierbar auf I. Falls es keinen n-fachen Randknoten gibt, ist f stetig und es gilt nach dem MWS $z(f') = m + 1 \geq \dim S_{n-1,T}$. Also hat f' ein Nullsegment $[\tau_k, \tau_{k+1})$ nach Induktionsannahme und f ist dort konstant. Wenn f dort nicht Null ist, dann "schneide das Intervall $[\tau_k, \tau_{k+1})$ aus". Dadurch verringert sich die Raumdimension um 1 und die Behauptung folgt aus der Annahme. Beweis für n-fache Randknoten als Übung.

Theorem: Schoenberg-Whitney

Habe T höchstens n-fache Knoten. Das Interpolationsproblem (U, G) mit einfachen Stützstellen U ist in $S_{n,T}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$b_j^n(u_j) > 0 \quad \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $b_j^n(u_j) = 0$. Die Interpolationsmatrix A hat Einträge $A_{k,\ell}$. Wenn $u_j \leq \tau_j$, dann ist $A_{k,\ell} = 0$ für alle (k, ℓ) mit $k \leq j$ und $\ell \geq j$. Wenn $u_j \geq \tau_{j+n}$, dann ist $A_{k,\ell} = 0$ für alle (k, ℓ) mit $k \geq j$ und $\ell \leq j$. In beiden Fällen ist A nicht invertierbar.

"$\Leftarrow$" Sei f eine Lösung von $(U, 0)$, dann verschwindet f auf einem Segment $[\tau_k, \tau_{k+1})$ nach dem vorigen Satz. Spalte T in zwei Knotenfolgen

$$T_\ell := \tau_1, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_k, \quad T_r := \tau_{k+1}, \ldots, \tau_{n+m}$$

und analog f in die Splines f_ℓ, f_r. Sowohl T_ℓ, f_ℓ als auch T_r, f_r erfüllen die Bedingungen des Satzes; also verschwinden f_ℓ und f_r wieder auf jeweils einem Segment. Iterierte Anwendung dieses Arguments zeigt, dass f identisch verschwindet.

Wählt man für das Interpolationsproblem auf der rechten Seite Einheitsvektoren, so erhält man als Lösung die *Lagrangefunktionen* L_k,

$$L_k(u_j) = \delta_{j,k}, \quad j = 1 : m.$$

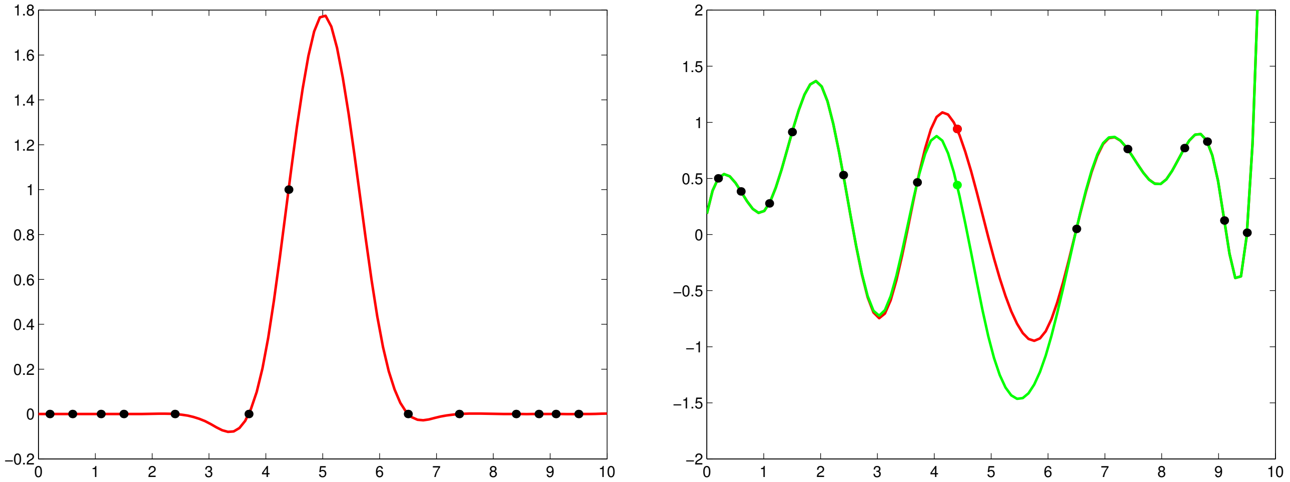
Die Lagrangefunktion L_k klingt exponentiell ab,

$$|L_k(t)| \le \alpha \exp(-\beta |t - u_k|),$$

wobei α, β positive Konstanten sind, die von der Knotenfolge und der Verteilung der Stützstellen abhängen.
Die Lösung des allgemeinen Interpolationsproblems lässt sich als Linearkombination von Lagrangefunktionen darstellen,

$$f = \sum_j L_j g_j.$$

Aufgrund des Abklingens der Lagrangefunktionen ist somit der Interpolationsprozess näherungsweise lokal, d.h. die Änderung eines Wertes g_j bewirkt im Wesentlichen eine Änderung des Interpolanten f in einer Umgebung der Stützstelle u_j.



3. Quasiinterpolation

Sei $\mathcal{S}_{n,T}$ der Raum der Splines der Ordnung n über der nichtentarteten Knotenfolge T. Ein *Quasiinterpolant* Q der Ordnung ν ist eine lineare Abbildung vom Raum der stetigen Funktionen $C(D(T))$ nach $\mathcal{S}_{n,T}(D(T))$, welche Polynome der Ordnung ν reproduziert,

$$Qg = \sum_j b_j^n(Q_j g), \quad Qp = p \; \forall \; p \in \mathbb{P}_\nu.$$

Dabei sind die Kontrollpunkte $g_j = Q_j g$ durch eine Folge linearer Funktionale Q_j definiert, die nur von der Einschränkung der Funktion g auf das Trägerintervall s_j^n abhängen,

$$Q_j g = Q_j g_{|s_j^n}.$$

Ferner seien die Funktionale Q_j gleichmäßig bezüglich der Maximum-Norm beschränkt.

Beispiel: Seien μ_j die Greville-Abszissen der Knotenfolge T, dann ist der *Schoenberg-Quasiinterpolant* gegeben durch

$$Q_j g = g(\mu_j).$$

Dieser hat die Ordnung 2, da aufgrund der linearen Präzision für jedes lineare Polynom $p(t) = at + b$ gilt

$$Qp = \sum_j b_j^n p(\mu_j) = p.$$

Im Übrigen sind die Q_j linear und bezüglich der Maximumnorm beschränkt durch

$$\|Q_j\|_\infty := \sup_{g \in C(D(T))} \frac{|Q_j g|}{\|g\|_\infty} = 1.$$

Der Approximationsfehler für das Schoenberg-Schema lässt sich folgendermaßen abschätzen:

Sei $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ fest und $p(s) = g(t) + g'(t)(s-t)$ das lineare Taylorpolynom in t. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(t) - (Qg)(t) &= g(t) - p(t) + (Q[p-g])(t) \\ &= \sum_{j=k-n+1}^{k} b_j^n(t)\big(p(\mu_j) - g(\mu_j)\big). \end{aligned}$$

Sei

$$h_t := [\tau_{k-n+1}, \tau_{k+n}]$$

der Träger all derjenigen B-Splines, die im Punkt $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ nicht verschwinden, und $|h_t|$ die *lokale Feinheit* der Knotenfolge im Punkt t. Dann gilt für den Fehler der Taylorapproximation

$$|p(\mu_j) - g(\mu_j)| \leq \frac{1}{2} \|g''\|_{\infty, h_t} |\mu_j - t|^2.$$

Außerdem ist $|\mu_j - t| \leq |h_t|$ und der Approximationsfehler kann abgeschätzt werden durch

$$|g(t) - (Qg)(t)| \leq \frac{1}{2} \|g''\|_{h_t} |h_t|^2.$$

Wie lassen sich Quasiinterpolanten höherer Ordnung konstruieren?

Betrachte die Marsden-Identität

$$(t-\tau)^{\nu-1} = \sum_j b_j^n(t)\psi_j^{n,\nu}(\tau)$$

$$\psi_j^{n,\nu}(\tau) := (-1)^{(n-\nu)} \frac{(\nu-1)!}{(n-1)!} \partial^{(n-\nu)} \psi_j^n(\tau).$$

Daraus folgt: Wenn für den Quasiinterpolanten Q gilt

$$Q_j(\cdot - \tau)^{\nu-1} = \psi_j^{n,\nu}(\tau), \quad j = 1:m,$$

dann hat Q die Ordnung ν.

Ein einfaches allgemeines Konstruktionsprinzip ist die Linearkombination von Funktionswerten,

$$Q_j g := \sum_k Q_{j,k}\, g(t_{j,k}), \quad t_{j,k} \in s_j^n.$$

In diesem Fall ist

$$\|Q_j\|_\infty = \sum_k |Q_{j,k}|.$$

Lemma: Für paarweise verschiedene Abszissen $t_{j,k}$ kann man die Koeffizienen $Q_{j,k}$ als Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmen. Die Koeffizienten eines Quasiinterpolanten der maximalen Ordnung n lassen sich insbesondere aus

$$\sum_{k=1}^n Q_{j,k}(t_{j,k} - t_{j,\ell})^{n-1} = \psi_j^n(t_{j,\ell}), \quad \ell = 1:n$$

bestimmen.

Satz: Für den Approximationsfehler eines Quasiinterpolanten Q der Ordnung ν gilt an der Stelle $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$

$$|g(t) - (Qg)(t)| \le \frac{1}{\nu!} \max_{k-n<j\le k} \|Q_j\|_\infty \|\partial^\nu g\|_{\infty,h_t} \, |h_t|^\nu.$$

Für den maximalen Fehler gilt entsprechend

$$\|g - Qg\| \le \frac{1}{\nu!} \max_j \|Q_j\|_\infty \|\partial^\nu g\|_\infty \, h_0^\nu.$$

Dabei ist

$$h_0 := \max_t |h_t|$$

die *globale Feinheit* der Knotnfolge.

Beweis: Sei $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ fest und

$$p(s) = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{\partial^\mu g(t)}{\mu!}(s-t)^\mu$$

das Taylorpolynom ν-ter Ordnung in t. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&|g(t) - (Qg)(t)| = |g(t) - p(t) + (Q[p-g])(t)| \\
&= |(Q[p-g])(t)| \le \max_{k-n<j\le k} |Q_j[p-g]| \\
&\le \max_{k-n<j\le k} \|Q_j\|_\infty \|p-g\|_{\infty,h_t}.
\end{aligned}$$

Für den Fehler der Taylorapproximation gilt

$$\|p - g\|_{\infty,h_t} \le \frac{\|\partial^\nu g\|_{h_t}}{\nu!} \, |h_t|^\nu,$$

woraus die Behauptung folgt.

Die Wahl der Abszissen $t_{j,k}$ ist entscheidend für den Wert von $\|Q_j\|_\infty$.
Eine kanonische Wahl für uniforme Splines, $\tau_j = hj$, der Ordnung n und maximale Ordnung n sind die Intervallmittelpunkte,

$$t_{j,k} = (j + k - 1/2)h, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dies ist besonders effizient, da sich die Funktionswerte $f(t_{j,k})$ für mehrere Werte von j verwenden lassen.
Das Lemma liefert damit nach Skalierung das LGS

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{j,k}(k - \ell)^{n-1} = \prod_{p=1}^{n-1}(p - \ell + 1/2), \quad \ell = 1 : n.$$

Die Koeffizienen $Q_k := Q_{j,k}$ hängen also weder von j noch von h ab. Insbesondere hängt auch $\|Q_j\|_\infty$ nicht von h ab.

$$\begin{array}{lrrrrrl}
n = 1: & 1 & & & & & /1 \\
n = 2: & 1 & 1 & & & & /2 \\
n = 3: & -1 & 10 & -1 & & & /8 \\
n = 4: & -7 & 31 & 31 & -7 & & /48 \\
n = 5: & 47 & -428 & 1914 & -428 & 47 & /1152
\end{array}$$

Für quadratische uniforme Splines ist also beispielsweise

$$Qg = \frac{1}{8} \sum_j b_j^3 \left(-g\left(\tfrac{2j+1}{2}h\right) + 10g\left(\tfrac{2j+3}{2}h\right) - g\left(\tfrac{2j+5}{2}h\right)\right)$$

ein Quasiinterpolant dritter Ordnung und

$$|g(t) - (Qg)(t)| \le \frac{125}{4} \|\partial^3 g\|_{h_t} h^3.$$

Für theoretische Zwecke ist im Allgemeinen folgende Wahl der Stützstellen zweckmäßig:

Sei

$$s_j^* := [\tau_J, \tau_{J+1})$$

das längste Teilintervall des Trägers s_j^n von b_j^n. Dann wählt man die Abszissen $t_{j,k}$ als äquidistante Unterteilung dieses Intervalls,

$$t_{j,k} := \tau_J + \frac{k-1}{n-1}\,|s_j^*|, \quad k = 1 : n.$$

Damit erhält man nach Skalierung das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{j,k}^* (k-\ell)^{n-1} = \frac{(n-1)^{n-1}}{|s_j^*|^{n-1}}\,\psi_j^n(t_{j,\ell}), \quad \ell = 1 : n$$

für einen Quasiinterpolanten Q^* maximaler Ordnung. Die Matrix des Systems ist unabhängig von T und die Elemente der rechten Seite sind betragsmäßig kleiner als n^{2n}. Damit sind alle $\|Q_j^*\|_\infty$ gleichmäßig durch eine Konstante $c(n)$ beschränkt, die nur vom der Ordnung n und nicht von der speziellen Wahl der Knotenfolge abhängt.

Die Fehlerabschätzung lautet hier

$$|g(t) - (Q^* g)(t)| \le c(n)\,\|\partial^n g\|_{\infty,h_t}\,|h_t|^n$$

$$\|g - Q^* g\|_\infty \le c(n)\,\|\partial^n g\|_\infty\,h_0^n.$$

Das Approximationsschema konvergiert also mit Ordnung n, wenn die Feinheit der Knotenfolge gegen 0 geht. Diese Konvergenzrate ist *optimal* für Splines der Ordnung n.

Für den oben konstruierten Quasiinterpolanten Q^* gilt

$$Q^* b_\ell^n = b_\ell^n$$

und

$$Q_j^* b_\ell = \delta_{j,\ell}.$$

Die Q_j^* sind also *duale Funktionale* zur B-Splinebasis. Insbesondere ist Q^* eine *Projektion* in den Splineraum $\mathcal{S}_{n,T}$,

$$Q^* \cdot Q^* = Q^*.$$

Beweis: Zunächst wird die Dualität gezeigt. Sei s_j^* das längste Teilintervall von s_j^n für festes j und r_ℓ das Polynom n-ter Ordnung, das mit b_ℓ^n auf s_j^* übereinstimmt. Dann ist

$$Q_j^* b_\ell^n = Q_j^* r_\ell$$

und

$$\sum_k b_k^n(t)\,(Q_k^* r_\ell) - b_\ell^n(t) \equiv 0, \quad t \in s_j^*.$$

Es gilt damit

$$Q_k^* r_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für } k = J-n+1,\ldots,\ell-1,\ell+1,\ldots,J \\ 1 & \text{für } k = \ell \end{cases}.$$

Wähle speziell $k = j$, dann ist

$$Q_j^* r_\ell = Q_j^* b_\ell^n = \delta_{j,\ell}.$$

Nun ist

$$Q^* b_\ell^n = \sum_j b_j^n (Q_j^* b_\ell^n) = \sum_j b_j^n \delta_{j,\ell} = b_\ell^n$$

und

$$Q^*(Q^* g) = \sum_j Q^* b_j^n (Q_j^* g) = \sum_j b_j^n (Q_j^* g) = Q^* g.$$

Eine wichtige Konsequenz dieses Resultats ist die *Stabilität* der B-Splinebasis, d.h. das Maximum eines Splines kann durch das Maximum seiner Koeffizienten abgeschätzt werden und umgekehrt.

Satz: Es gibt eine Konstante $c(n) > 0$, die nur vom der Ordnung n abhängt, so dass für jede nichtentartete Knotenfolge T gilt

$$c(n)^{-1} \max_j |f_j| \leq \left\| \sum_k b_k^n f_k \right\|_{\mathbb{R}} \leq \max_j |f_j| \, .$$

Beweis: Es gilt

$$Q_j^* \sum_k b_k^n f_k = \sum_k \delta_{j,k} f_k = f_j$$

und $\|Q_j^*\|$ ist durch die Konstante $c(n)$ beschränkt. Damit erhält man

$$|f_j| \leq \|Q_j^*\| \left\| \sum_k b_k^n f_k \right\|_{\mathbb{R}} \;\Rightarrow\; |f_j|/c(n) \leq \left\| \sum_k b_k^n f_k \right\|_{\mathbb{R}}.$$

Die zweite Ungleichung ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Positivität der B-Splines und der Partition der Eins.

Es können auch Ableitungen an einer Stelle $t_j \in s_j^n$ zur Konstruktion von Quasiinterpolanten verwendet werden,

$$Q_j g = \sum_{k=1}^n Q_{j,k} \, \partial^{n-k} g(t_j).$$

Der *de Boor – Fix Quasiinterpolant*

$$Q_{j,k} := \frac{(-1)^{(k-1)} \, \partial^{(k-1)} \psi_j^n(t_j)}{(n-1)!}$$

hat die maximale Ordnung n. Beweis als Übungsaufgabe.

4. Approximation

Approximation bezeichnet allgemein die Annäherung von Funktionen oder diskreten Daten in einem gegebenen Funktionenraum. Insofern sind Interpolation und Quasiinterpolation Spezialfälle der Approximation.

Diskrete Approximation: Ist bei einem Problem der Form

$$\sum_{j=1}^{m} b_j^n(u_k) f_j = g_k, \quad k = 1, \ldots, M$$

mit paarweise verschiedenen Stützstellen u_k die Anzahl der Bedingungen größer als die Anzahl der Freiheitsgrade, also $M > m$, so können die gegebenen Daten im Allgemeinen nicht exakt reproduziert werden. Man fordert dann, dass der Fehlervektor

$$\Delta(F) := AF - G, \quad A_{k,j} = b_j^n(u_k)$$

bezüglich einer geeigneten Norm minimal wird.

Satz: Das Approximationsproblem

$$\|\Delta(F)\| \to \min$$

besitzt stets eine Lösung.

Beweis: Zerlege den $\mathbb{R}^m$ in die direkte Summe

$$\mathbb{R}^m = \ker(A) \oplus \ker(A)^\perp =: X \oplus Y.$$

Mit

$$F = F_X + F_Y, \quad F_X \in X,\ F_Y \in Y$$

ist

$$\Delta(F) = \Delta(F_Y)$$

und

$$\begin{aligned} \delta &:= \inf\{\|\Delta(F)\| : F \in \mathbb{R}^m\} \\ &= \inf\{\|\Delta(F_Y)\| : F_Y \in Y\}. \end{aligned}$$

Die Mengen

$$\begin{aligned} S(r) &:= \{F_Y \in Y : \|F_Y\| = r\} \\ K(r) &:= \{F_Y \in Y : \|F_Y\| \le r\} \end{aligned}$$

sind kompakt und die $\|\cdot\|$-Funktion ist stetig. Deshalb ist

$$\varrho := \min\{\|AF_Y\| : F_Y \in S(1)\} > 0.$$

Sei $r := 2\|G\|/\varrho$. Für $\|F_Y\| > r$ ist

$$\begin{aligned} \|\Delta(F_Y)\| &\ge \|AF_Y\| - \|G\| \ge \varrho\|F_Y\| - \|G\| \\ &> \|G\| = \|\Delta(0)\| \ge \delta. \end{aligned}$$

und deshalb

$$\delta = \inf\{\|\Delta(F_Y)\| : F_Y \in K(r)\}.$$

Die Menge $K(r)$ ist kompakt, also nimmt die stetige Funktion $\|\Delta(\,\cdot\,)\|$ dort ihr Minimum an.

Die Eindeutigkeit der Lösung hängt nicht nur von der Verteilung der Stützstellen, sondern auch von der gewählten Norm ab. Insbesondere ist das Approximationsproblem bezüglich der Maximumnorm in einem Splineraum in der Regel *nicht* eindeutig lösbar, selbst wenn sehr viele gleichmäßig verteilte Stützstellen verwendet werden. Dagegen gilt für die häufig verwendete Euklidische Norm:

Satz: Wenn es eine m-elementige Teilfolge U' der Stützstellenfolge U gibt, die die Schoenberg-Whitney-Bedingung erfüllt, $b_j^n(u_j') > 0$, dann besitzt das Approximationsproblem

$$\|\Delta(F)\|_2 \to \min$$

bezüglich der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ eine eindeutige Lösung. Diese Lösung ist durch die *Normalengleichung* charakterisiert,

$$A^T A\, F := A^T G\,.$$

Beweis: Wenn U' die Schoenberg-Whitney-Bedingung erfüllt, dann hat die Teilmatrix $A' = B^n(U')$ und damit auch $A = B^n(U)$ vollen Rang. Also ist $A^T A$ invertierbar. Eine notwendige Bedingung für ein Minimum der Funktion

$$\|\Delta(F)\|_2^2 = F^T A^T A F - 2G^T A F + G^T G$$

ist das verschwinden des Gradienten

$$\nabla\big(\|\Delta(F)\|_2^2\big) = 2F^T A^T A - 2G^T A \;\Rightarrow\; A^T A F = A^T G.$$

Da $A^T A$ invertierbar ist, ist diese Lösung eindeutig. Wenn A einen nichttrivialen Kern X hat, dann folgt die Nichteindeutigkeit des Minimums aus $\Delta(F) = \Delta(F{+}F')$, $F' \in X$.

Beispiel: Approximation der Daten

$$g_k = \sin(\pi u_k/4),\ \ u_k = (k-1)/3,\ \ k = 1, \ldots, 7$$
$$\Rightarrow\ \ G = [0,\, 0.259,\, 0.500,\, 0.707,\, 0.866,\, 0.966,\, 1]^T$$

mit kardinalen quadratischen Splines, $T = -2, \ldots, 4$, bezüglich der Euklidischen Norm.

i) Die Bedingungen des Satzes von Schoenberg-Whitney sind für die Teilfolge $\tilde{U} = [u_1, u_2, u_3, u_5]$ erfüllt, also existiert eine eindeutige Lösung.

ii) Die Matrix des Problems ist

$$A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

iii) Die Normalengleichung ist

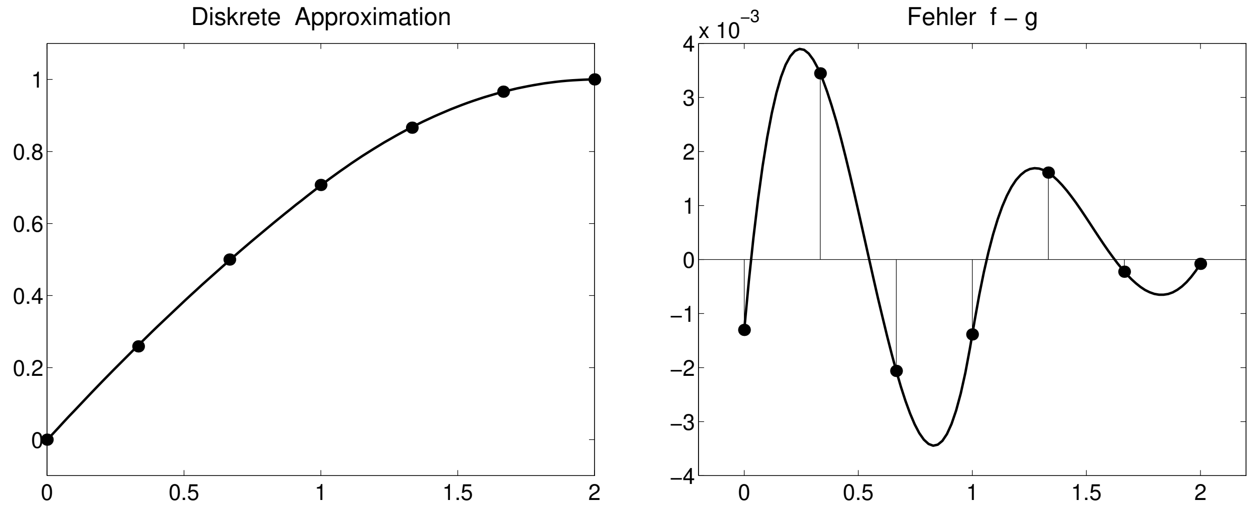
$$\frac{1}{324}\begin{bmatrix} 98 & 146 & 8 & 0 \\ 146 & 517 & 211 & 8 \\ 8 & 211 & 517 & 146 \\ 0 & 8 & 146 & 98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.085 \\ 1.148 \\ 2.302 \\ 0.763 \end{bmatrix}.$$

iv) Die Lösung des Approximationsproblems lautet

$$F = [-0.418,\, 0.415,\, 0.996,\, 1.003]^T$$

und der Fehler ist

$\Delta(F) = 10^{-3} * [-1.3,\, 3.4,\, -2.1,\, -1.4,\, 1.6,\, -0.2,\, -0.1]^T.$



Kontinuierliche Approximation: Zur Approximation einer Funktion g über dem Intervall $[\tau_n, \tau_{m+1}]$ mit Splines in $\mathcal{S}_{n,T}$ minimiert man die Fehlerfunktion

$$\Delta(F) = \sum_j b_j^n f_j - g$$

bezüglich einer geeigneten Funktionennorm. Wie im diskreten Fall exisitert auch hier stets ein Lösung; der Beweis erfolgt vollkommen analog zum vorigen Satz. Die Eindeutigkeit hängt ausschließlich von der gewählten Norm ab, sofern die Knotenfolge T nichtentartet ist.

Zweckmäßig ist die Verwendung von *Hilbertraumnormen*, die durch ein Skalarprodukt induziert sind,

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle.$$

In diesem Fall gilt der folgende Satz:

Satz: Sei $(X, \|\cdot\|)$ eine Hilbertraum, T nichtentartet und $g \in X$, $\mathcal{S}_{n,T} \subset X$. Dann ist das Approximationsproblem

$$\|\Delta(F)\| \to \min$$

eindeutig lösbar. Die Lösung ist charakterisiert durch das LGS

$$AF = G,$$

wobei die $(m \times m)$-Matrix A und der m-Vektor G gegeben sind durch

$$A_{j,k} = \langle b_j^n, b_k^n \rangle, \quad G_j = \langle g, b_j^n \rangle, \quad j, k = 1 : m.$$

Die *Gram-Matrix* A ist symmetrisch und positiv definit.

Beweis: Für die Norm der Fehlerfunktion gilt

$$\begin{aligned}\|\Delta(F)\|^2 &= \Big\langle \sum_j b_j^n f_j - g, \sum_j b_j^n f_j - g \Big\rangle \\ &= F^T A F - 2G^T F + \|g\|^2.\end{aligned}$$

Eine notwendige Bedingung für ein Minimum ist das Verschwinden des Gradienten,

$$\nabla(\|\Delta(F)\|^2) = 2F^T A - 2G^T = 0 \;\Leftrightarrow\; AF = G.$$

Es bleibt zu zeigen, dass A positiv definit ist. Sei $F \neq 0$, dann ist der zugehörige Spline $f := B^n F$ ebenfalls von Null verschieden. Damit gilt

$$F^T A F = \|f\|^2 > 0.$$

Häufig verwendet man die L^2-Norm

$$\|f\| := \left(\int_{\tau_n}^{\tau_{m+1}} |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}, \ \langle f, g\rangle = \int_{\tau_n}^{\tau_{m+1}} f(t)g(t)\, dt.$$

Die Matrix A hat eine Bandstruktur,

$$A_{j,k} = 0 \quad \text{für} \quad |j-k| \geq n.$$

Zur exakten numerischen Berechnung der übrigen Matrixeinträge

$$A_{j,k} = \langle b_j^n, b_k^n\rangle = \sum_\ell \int_{\tau_\ell}^{\tau_{\ell+1}} b_j^n(t) b_k^n(t)\, dt$$

muss über jedem relevanten Intervall $[\tau_\ell, \tau_{\ell+1}]$ ein Polynom der Ordnung $2n-1$ integriert werden. Dies ist mit Gauss-Legendre-Quadraturformeln mit n Knoten möglich. Zum Vergleich: Bei Verwendung von Newton-Cotes-Formeln benötigt man $2n-1$ Knoten.

Beispiel: Die Gauss-Legendre-Quadraturformel der Ordnung 6 ist

$$\int_0^1 f(t)\, dt \approx \frac{5}{18} f(1/2-a) + \frac{4}{9} f(1/2) + \frac{5}{18} f(1/2+a),$$

wobei $a = \sqrt{15}/10$. Diese ist exakt für Polynome der Ordnung 6. Damit erhält man beispielsweise für das L^2-Produkt der kardinalen quadratischen B-Splines b_1^3 und b_2^3

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_1^3(t) b_2^3(t)\, dt = 2\int_0^1 b_1^3(t) b_2^3(t)\, dt = \frac{13}{60}.$$

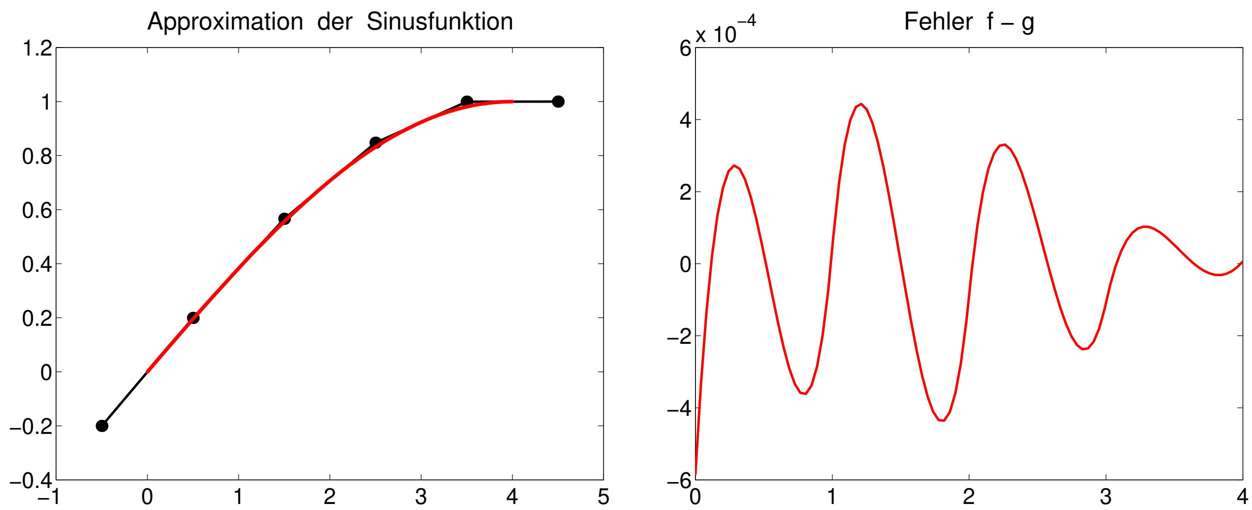
Beispiel: Approximation der Funktion $g(t) = \sin(\pi t/8)$ mit kardinalen quadratischen Splines, $T = -2, \ldots, 6$, bezüglich der L^2-Norm über dem Intervall $[0, 4]$.

Das zugehörige Gleichungssystem ist

$$\frac{1}{120}\begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 60 & 26 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 26 & 60 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 6 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 0.0163 \\ 0.2076 \\ 0.5450 \\ 0.8156 \\ 0.7967 \\ 0.1654 \end{bmatrix}$$

Die Lösung ist

$$\Rightarrow \; F = [-0.2003,\ 0.1992,\ 0.5663,\ 0.8478,\ 0.9998,\ 1.0002]^T.$$



Satz Sei T nichtentartet und g glatt. Dann gilt für den Approximationsfehler $\Delta = f - g$ in der L^2-Norm

$$\|\Delta\|_2 \leq c(n)\,|\tau_{m+1} - \tau_n|^{1/2}\,\|\partial^n g\|_\infty\, h^n.$$

Beweis: Wähle $f^* := Q^* g$ als den Quasiinterpolanten gemäß Seite 49 und setze $\Delta^* := f^* - g$. Dann gilt für das Fehlermaximum

$$\|\Delta^*\|_\infty \leq c(n)\,\|\partial^n g\|\, h^n.$$

Die Behauptung folgt dann aus der Abschätzung

$$\|\Delta\|_2^2 \leq \|\Delta^*\|_2^2 = \int_{\tau_0}^{\tau_m} (\Delta^*)^2(t)\,dt \leq |\tau_m - \tau_0| \|\Delta^*\|_\infty^2.$$

Orthogonale Approximation: Die L^2-Approximation hat den Nachteil, dass zur Bestimmung der Koeffizienten ein unter Umständen großes lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Eine Ausnahme bilden Splines der Ordnung 1. Diese sind nämlich orthogonal bezüglich der L^2-Norm,

$$\langle b_j^1, b_k^1\rangle_2 = |s_j^1|\,\delta_{j,k}.$$

Die Matrix A hat folglich Diagonalgestalt und die Lösung des LGS $AF = G$ lässt sich unmittelbar ablesen,

$$f_j = \frac{1}{|s_j^1|} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} g(t)\,dt.$$

Für $n > 1$ sind die B-Splines nicht L^2-orthogonal.

Durch Gram-Schmitt-Orthogonalisierung kann eine L^2-orthogonale Basis des Splineraums konstruiert werden; allerdings ist diese nicht stabil.

Idee: Verwende andere Norm, z.B. die *Sobolevnorm*

$$\|f\|_1^2 := \omega_0 \|f\|^2 + \omega_1 \|\partial f\|^2, \quad \omega_0, \omega_1 > 0.$$

Das zugehörige Skalarprodukt ist

$$\langle f, g\rangle_1 := \omega_0 \langle f, g\rangle + \omega_1 \langle \partial f, \partial g\rangle.$$

Können die Gewichte ω_0, ω_1 so bestimmt werden, dass die linearen kardinalen B-Splines b_j^2 mit Knoten $\tau_j = j$ orthogonal werden?

i) Die $\|\cdot\|_1$-Norm linearer B-Splines ist wohldefiniert.

ii) Für $|j-k| \geq 2$ sind die Träger disjunkt und es gilt

$$\langle b_j^2, b_k^2\rangle_1 = 0\,, \quad |j-k| \geq 2\,.$$

iii) Für $j = k-1$ gilt

$$\begin{aligned}\langle b_{k-1}^2, b_k^2\rangle_1 &= \int_0^1 \big(\omega_0\, b_{-1}^2(t) b_0^2(t) + \omega_1\, \partial b_{-1}^2(t) \partial b_0^2(t)\big)\, dt \\ &= \omega_0/6 - \omega_1 \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Orthogonalität erhält man also für $\omega_0 = 6\omega_1, \omega_1 > 0$.

iv) Der verbleibende Freiheitsgrad kann zur Normierung verwendet werden: Für $j = k$ gilt

$$\langle b_k^2, b_k^2\rangle_1 = \int_0^2 \Big(\big(\omega_0\, b_0^2(t)\big)^2 + \omega_1\, \big(\partial b_0^2(t)\big)^2\Big)\, dt = \frac{2\omega_0}{3} + 2\omega_1 \stackrel{!}{=} 1.$$

Damit erhält man *Orthonormalität* $\langle b_j^1, b_k^1\rangle_1 = \delta_{j,k}$ für

$$\omega_0 := 1, \quad \omega_1 := 1/6.$$

Im uniformen Fall mit Knoten $\tau_j = hj$ erhält man Orthonormalität für

$$\omega_0 := 1/h, \quad \omega_1 := h/6.$$

Für höhere Ordnungen benötigt man mehr Freiheitsgrade, um Orthonormalität zu erreichen. Für B-Splines der Ordnung n verwendet man die Sobolevnorm

$$\|f\|_\Omega^2 := \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu \|\partial^\mu f\|^2, \quad \omega_\mu > 0.$$

Das zugehörige Skalarprodukt ist

$$\langle f, g\rangle_\Omega = \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu \langle \partial^\mu f, \partial^\mu g\rangle.$$

Satz: Die kardinalen B-Splines b_j^n sind genau dann orthonormal bezüglich der Sobolevnorm $\|\cdot\|_\Omega$, wenn für die Gewichte $\omega_\mu = \omega_\mu(n), \mu = 0 : n-1$, gilt

$$\left(\frac{y/2}{\sin(y/2)}\right)^{2n} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu(n) y^{2\mu} + O(y^{2n}).$$

n	$\omega_0(n)$	$\omega_1(n)$	$\omega_2(n)$	$\omega_3(n)$	$\omega_4(n)$	$\omega_5(n)$
1	1					
2	1	$\frac{1}{6}$				
3	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{30}$			
4	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{140}$		
5	1	$\frac{5}{12}$	$\frac{13}{144}$	$\frac{41}{3024}$	$\frac{1}{630}$	
6	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{31}{240}$	$\frac{139}{6048}$	$\frac{479}{151200}$	$\frac{1}{2772}$

Im uniformen Fall $T = h\mathbb{Z}$ sind die Gewichte zu skalieren,

$$\omega_\mu(n, h) := \omega_\mu(n)\, h^{2\mu-1}.$$

Kardinale B-Splines und Fouriertechniken

Für die kardinalen B-Splines b_j^n der Ordnung n mit Knoten $T = \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} b_0^1 &= \chi_{[0,1)} \\ b_0^n(t) &= \int_{t-1}^{t} b_0^{n-1}(s)\, ds \\ b_j^n(t) &= b_0^n(t-j) \end{aligned}$$

Der *zentrierte kardinale B-Spline* der Ordnung n ist definiert durch

$$b^n := b_0^n(\cdot + n/2).$$

Der Faltungsoperator $*$ ist definiert durch,

$$(f * g)(t) := \int_{\mathbb{R}} f(s) g(t-s)\, ds.$$

Er ist kommutativ und assoziativ,

$$f * g = g * f\,, \quad (f * g) * h = f * (g * h).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} b^n &= b^{n-1} * b^1 \\ b^{n+m} &= b^n * b^m. \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation bzw. die Fourierreihe einer Funktion f sind definiert durch

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-ixy)\, dx$$

$$\bar{f}(y) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) \exp(-ijy).$$

Zwischen diesen Funktionen besteht gemäß der Poissonschen Summenformel der Zusammenhang

$$\bar{f}(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(y + 2k\pi),$$

sofern $\bar{f}$ und $\hat{f}$ im Unendlichen schneller abklingen als $1/|y|$.

Die Fouriertransformation hat u.A. folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
g(x) = f(x/a) \ &\Rightarrow\ \hat{g}(y) = |a| \hat{f}(ay) \\
g(x) = f(x+a) \ &\Rightarrow\ \hat{g}(y) = \exp(iay) \hat{f}(y) \\
g = f \star h \ &\Rightarrow\ \hat{g} = \hat{f}\hat{h} \\
g = \partial f \ &\Rightarrow\ \hat{g} = iy\hat{f} \\
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \exp(ixy)\, dy \\
\langle f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.
\end{aligned}$$

Für einen kardinalen B-Spline gilt

$$\hat{b}^n(y) = \operatorname{sinc}^n(y/2), \quad \operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \partial^\mu b^n(t) \partial^\mu b^n(t-x)\, dt &= (-1)^\mu (\partial^\mu b^n * \partial^\mu b^n)(x) \\ &= (-1)^\mu \partial^{2\mu} b^{2n}(x)\,.\end{aligned}$$

Setze

$$g(x) := \langle b^n, b^n(\cdot - x)\rangle_\Omega,$$

dann ist

$$g(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu (-1)^\mu \partial^{2\mu} b^{2n}(x)$$

$$\hat{g}(y) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu y^{2\mu} \operatorname{sinc}^{2n}(y/2).$$

Die Fourierreihe $\bar{g}(y)$ ist ein trigonometrisches Polynom der Ordnung n. Damit ist Orthonormalität äquivalent zu

$$\begin{aligned} & g(j) = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \quad & \bar{g}(y) \equiv 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \bar{g}(y) = 1 + \mathcal{O}(y^{2n}).\end{aligned}$$

Nun liefert die Poissonsche Summenformel

$$\begin{aligned}
\bar{g}(y) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(y+2k\pi) \\
&= \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \omega_\mu (y+2k\pi)^{2\mu} \operatorname{sinc}^{2n}(y/2+k\pi) \\
&= \Big(\sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu y^{2\mu}\Big)\Big(\operatorname{sinc}^{2n}(y/2) + \mathcal{O}(y^{2n})\Big).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu y^{2\mu} = 1/\operatorname{sinc}^{2n}(y/2) + \mathcal{O}(y^{2n})$$

notwendig und hinreichend für Orthonormalität.

Die Positivität der Gewichte ω_μ folgt aus der Positivität der Koeffizienten der Taylor-Entwicklung der Funktion $1/\operatorname{sinc}(x)$.

Satz Für hinreichend glattes g ist die Lösung des Approximationsproblems

$$\|f-g\|_{\Omega(n,h)} \to \min\,, \quad f \in \mathcal{S}_{n,h\mathbb{Z}}$$

gegeben durch $f = P_h g = \sum_j b_{j,h}^n f_j$, wobei

$$f_j = \langle b_{j,h}^n, g\rangle_{\Omega(n,h)}$$

und

$$\langle f, g\rangle_{\Omega(n,h)} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu(n) h^{2\mu-1} \langle \partial^\mu f, \partial^\mu g\rangle.$$

P_h ist ein Quasiinterpolant der Ordnung n und darüber hinaus eine Projektion in den Splineraum,

$$P_h \circ P_h = P_h.$$

Satz: Die Konvergenzrate von P_h ist optimal, d.h., es gibt eine nur von n abhängige Konstante $c(n)$, so dass

$$\|g - P_h g\|_\infty \leq c(n) \|\partial^n g\|_\infty h^n.$$

Beweis: Für den Quasiinterpolanten Q^* gemäß Seite 49 gilt genauer

$$\|\partial^\mu (g - Q^* g)\|_\infty \leq c_1(n) \|\partial^n g\|_\infty h^{n-\mu}.$$

Nun gilt mit $r := g - Q^* g$

$$\|g - P_h g\|_\infty \leq \|r\|_\infty + \|P_h r\|_\infty.$$

Für den ersten Summanden gilt die Abschätzung, zu untersuchen bleibt also der zweite. Hier ist

$$\|P_h r\|_\infty \leq \sup_j \left| \langle b_{j,h}^n, r \rangle_{\Omega(n,h)} \right|$$

und

$$\begin{aligned}
\left| \langle b_{j,h}^n, r \rangle_{\Omega(n,h)} \right| &\leq \sum_{\mu=0}^{n-1} h^{2\mu-1} \omega_\mu(n) \int_{\mathbb{R}} |\partial^\mu b_{j,h}^n| |\partial^\mu r| \\
&\leq c_1(n) \|\partial^n g\|_\infty h^n \sum_{\mu=0}^{n-1} h^{\mu-1} \omega_\mu(n) \int_{\mathbb{R}} |\partial^\mu b_{j,h}^n| \\
&\leq c_2(n) \|\partial^n g\|_\infty h^n.
\end{aligned}$$

Approximation mit Nebenbedingungen

Die Lösung des Approximationsproblems

$$\|f - g\| \to \min, \quad f \in \mathcal{S}_{n,T},$$

unter den linearen Nebenbedingungen

$$CF = D$$

ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} A & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ D \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $AF = G$ das Gramsche System ohne Nebenbedingungen und L ein Vektor von *Lagrange-Multiplikatoren*.

Ist A speziell die Einheitsmatrix, dann gilt

$$F = G + C^T(CC^T)^{-1}(D - CG).$$

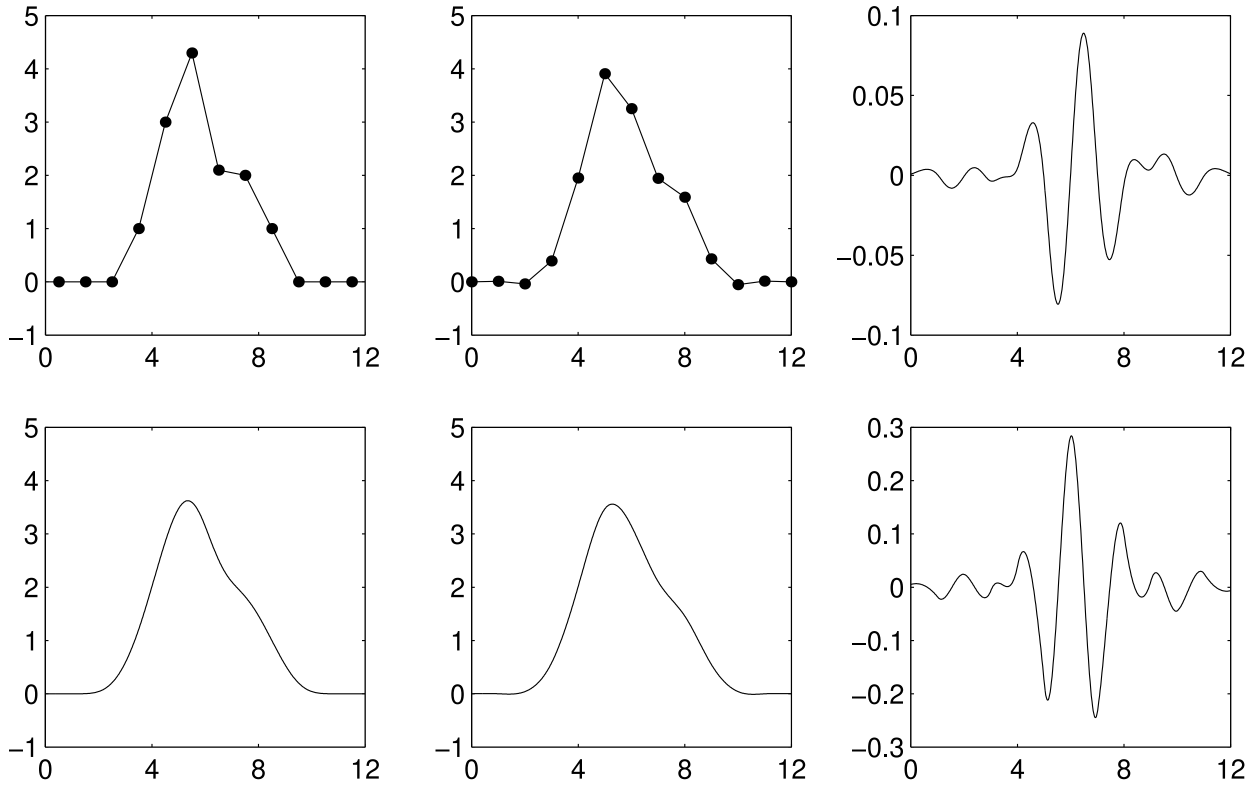
Dies bedeutet: Man erhält die gesuchte Lösung durch orthogonale Projektion (im Euklidischen Sinne) der uneingeschränkten Lösung $F_0 = G$ in den Raum der zulässigen Kontrollpunkte.

Beispiel: Gegeben sei ein quartischer kardinaler Spline mit Koeffizienten

$$[\mathbf{0},\, 1.0,\, 3.0,\, 4.3,\, 2.1,\, 2.0,\, 1.0,\, \mathbf{0}]\,.$$

Gesucht ist der bestapproximierende kubische kardinale Spline. Orthogonale Approximation ergibt die Koeffizienten

$$F_0 = [\mathbf{0},\, -0.002,\, 0.011,\, -0.039,\, 0.392,\, 1.950,\, 3.909,\, 3.252,\, 1.943,\, 1.591,\, 0.433,\, -0.051,\, 0.012,\, -0.002,\, \mathbf{0}].$$

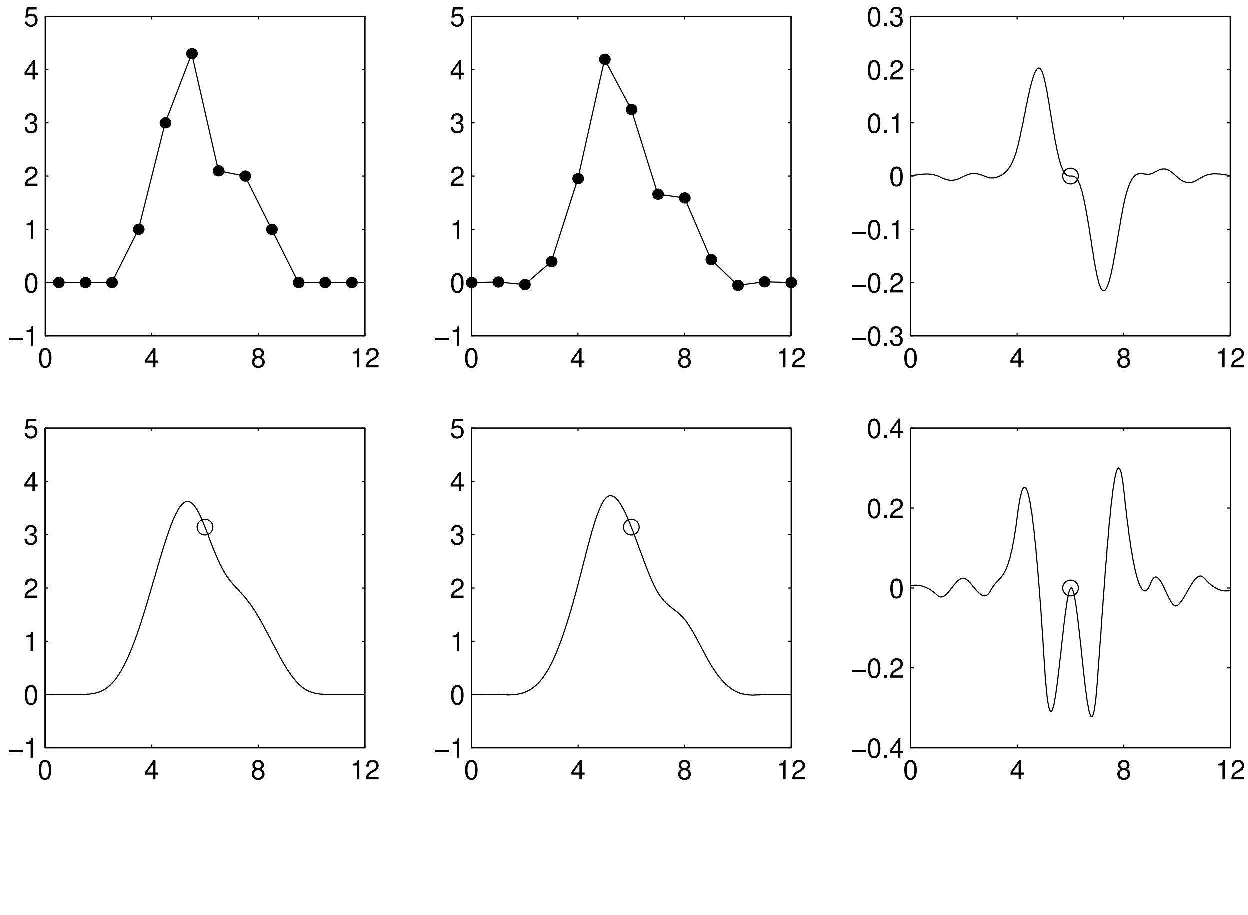


Die Gradreduktion soll nun so durchgeführt werden, dass die Approximation an der Stelle $t = 6$ sowohl den Wert als auch die erste Ableitung des gegeben Splines interpoliert. Die Nebenbedingungen sind hier

$$C := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0.167 & 0.667 & 0.167 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -0.500 & 0.000 & 0.500 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} 3.142 \\ -1.267 \end{bmatrix}.$$

Die Projektion in den zulässigen affinen Unterraum liefert

$$F = [\mathbf{0}, -0.002, 0.011, -0.039, 0.392, 1.950, \mathbf{4.192}, \mathbf{3.250}, \mathbf{1.659}, 1.591, 0.433, -0.051, 0.012, -0.002, \mathbf{0}].$$



Local Least Squares Ein Quasiinterpolant für beliebige Knotenfolgen, der in den Anwendungen sehr gute numerische Resultate liefert, lässt sich wie folgt konstruieren:

Sei (der Einfachheit halber) T eine beliebige biinfinite Knotenfolge für Splines der Ordnung n und g die zu approximierende Funktion. Zur Bestimmung des Koeffizienten f_k löst man das L^2-Problem auf dem Intervall s_j^n,

$$\left\| g - \sum_{j=k-n+1}^{k+n-1} b_j^n \tilde{f}_j \right\| \to \min$$

und setzt $f_k = \tilde{f}_k$. Der so konstruierte Quasiinterpolant ist beschränkt bezüglich der Maximumnorm und außerdem ein Projektor.

Varianten:

- Das Approximationsintervall kann verkleinert werden, z.B. um Kontrollpunkte am Rand zu bestimmen.
- Das Approximationsintervall kann vergrößert werden; je mehr Segmente verwendet werden, desto näher kommt das Resultat der L_2-Approximation.
- Die Integration kann durch eine numerische Quadraturformel ersetzt werden.
- Bei uniformen Splines kann die Inverse der Gramschen Matrix vorab berechnet werden.
- Wenn diskrete Daten gegeben sind, kann die L_2-Approximation durch eine Approximation in der Euklidischen Norm ersetzt werden (Schoenberg-Whitney beachten).

Smoothing Splines Eine weitere Möglichkeit zur Approximation ensteht aus der Kombination der Glättungseigenschaft des natürlichen kubischen Splineinterpolanten und der Approximation der Daten.

Smoothing Spline: Gegeben sind wieder Daten $G := [g_1, \dots, g_M]$ und die Stützstellenfolge $U = [u_1, \dots, u_M]$. Gesucht ist die Funktion f, die das Funktional

$$\alpha \int_{u_1}^{u_M} \|\partial^2 f(t)\|^2 \, dt + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{M} \|f(u_j) - g_j\|^2$$

minimiert. Dabei ist $\alpha \in (0,1)$ ein Parameter.
Die Lösung dieses Problems ist ein natürlicher kubischer Spline mit Knoten

$$T = u_1^{(4)}, u_2, \dots, u_{M-1}, u_M^{(4)}.$$

Die Koeffizienten F der Lösung $f = \sum_j b_j^4 f_j$ sind bestimmt durch

$$\big(\alpha C + (1-\alpha) A^T A\big) F = (1-\alpha) A^T G.$$

Dabei ist C eine symmetrische $(m \times m)$-Matrix mit Einträgen

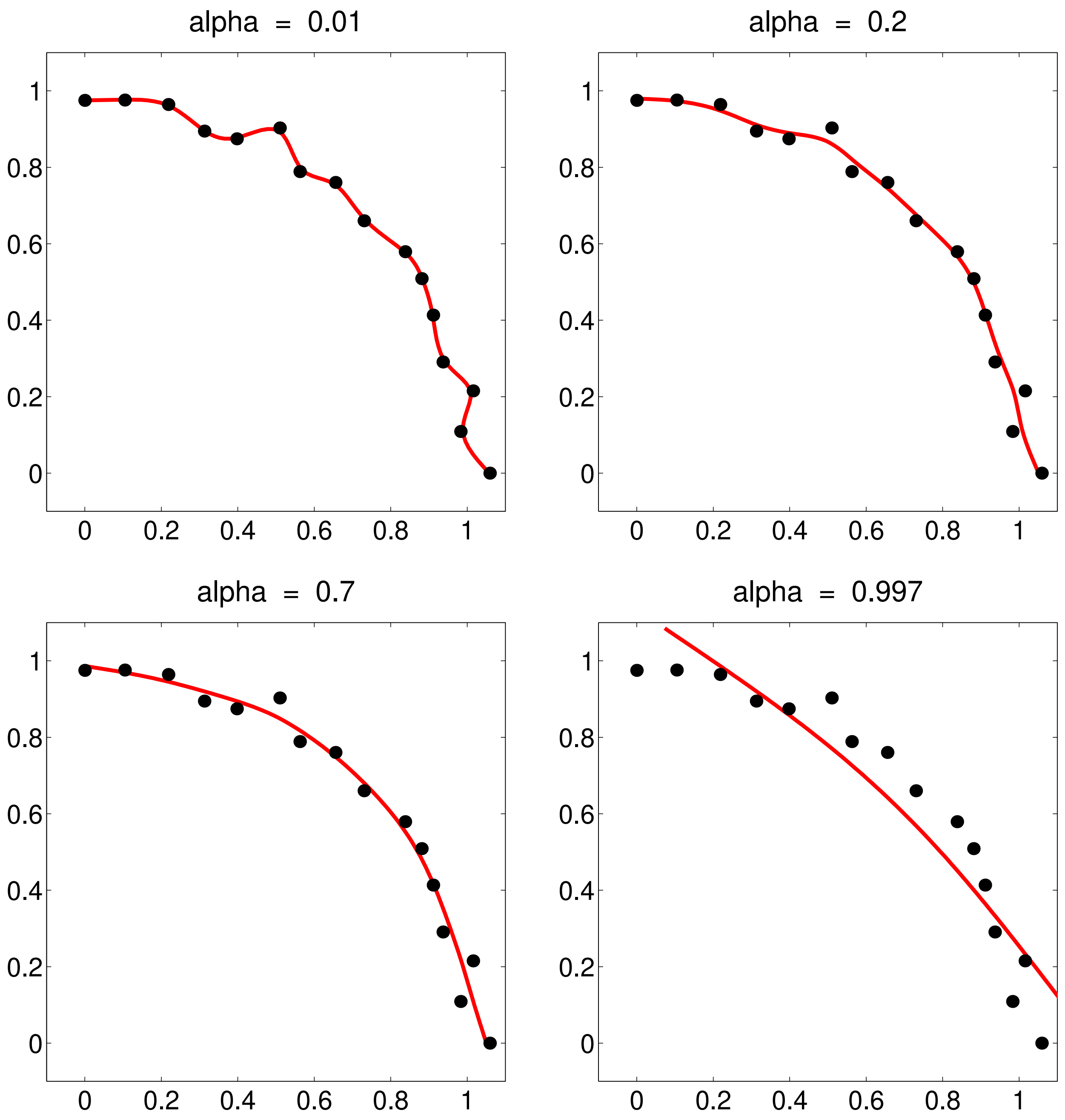
$$C_{j,k} = \langle \partial^2 b_j^4, \partial^2 b_k^4 \rangle$$

und A eine $(M \times m)$-Interpolationsmatrix mit Einträgen

$$A_{j,k} = b_k^4(u_j).$$

- Für $\alpha \to 0$ dominiert der Approximationsterm und die Lösung konvergiert gegen den natürlichen kubischen Splineinterpolant.
- Für $\alpha \to 1$ dominiert der Glättungsterm und die Lösung konvergiert gegen die Ausgleichsgerade.

Beispiel: Smoothing Spline für verschiedene Werte des Parameters α:



Zur Bestimmung eines geeigneten Parameters α kann man versuchen, maximale Glattheit (d.h. maximales α) unter Einhaltung einer gegebenen Fehlerschranke zu erzielen. Man setzt dazu $\beta := 1/\alpha - 1 \in (0, \infty)$ und betrachtet das äquivalente Problem

$$\|\partial^2 f\|_2^2 + \beta \|\Delta\|_2^2 \to \min, \quad \text{wobei} \quad \Delta := f(U) - G.$$

Hier ist β so zu bestimmen, dass die Lösung $F = F(\beta)$ die Fehlerschranke $d(\beta) = \mathrm{tol}$ einhält, wobei

$$d(\beta) := \|\Delta\|_2^2, \quad \text{und} \quad f = B^4 F.$$

Mit $M := A^T A$ ist das LGS für den Smoothing-Spline

$$(C + \beta M) F = \beta A^T G.$$

Die Koeffizienten F_∞ des natürlichen kubischen Splineinterpolanten erfüllen $A F_\infty = G$. Mit $F = F_\infty - \tilde{F}$ erhält man

$$(C + \beta M) \tilde{F} = C F_\infty$$

und

$$d(\beta) = \tilde{F}^T M \tilde{F}.$$

Die Funktion $d(\beta)$ ist positiv, monoton fallend und konvex. Damit kann z.B. das Newton-Verfahren effizient zur Lösung der Gleichung

$$d(\beta) = \mathrm{tol}$$

eingesetzt werden.

5. Geometrische Approximation

Bei der Interpolation und Approximation geometrischer Daten in $\mathbb{R}^d$ ist die Wahl der Parametrisierung von entscheidender Bedeutung.

Interpolation einer geordneten Punktfolge:
Die Punktfolge

$$\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m \;\in \mathbb{R}^d$$

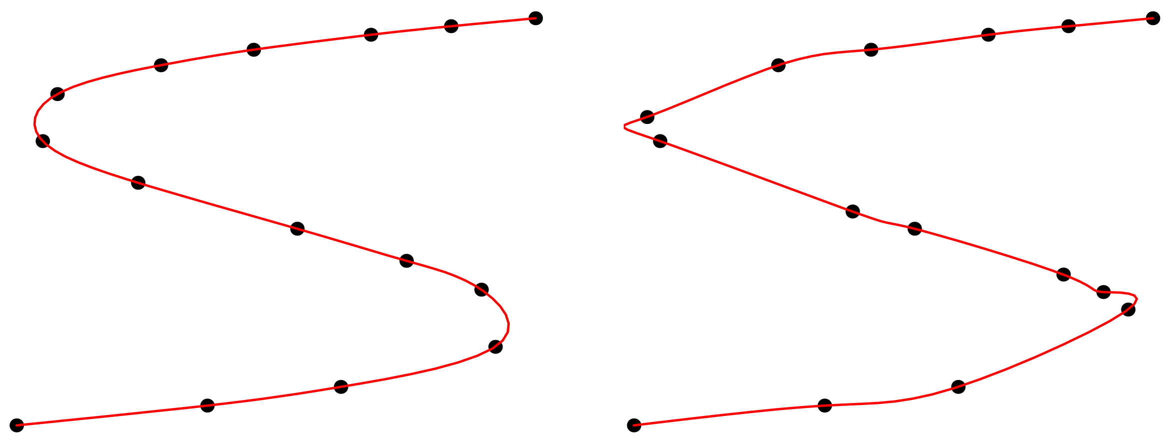
soll interpoliert werden. Dazu müssen den Punkten $\mathbf{g}_j$ Stützstellen u_j zugewiesen werden. Die einfachste Möglichkeit ist die *äquidistante Parametrisierung* $u_j = j$,

$$\mathbf{f}(j) = \mathbf{g}_j.$$

Beispiel: Äquidistante Interpolation der Daten $\mathbf{g}_j$ mit dem natürlichen kubischen Splineinterpolanten,

$$\mathbf{f} := \sum_{j=1}^{m} b_j^4 \mathbf{f}_j, \quad T = -3, \ldots, m+3$$
$$\mathbf{f}(j) = \mathbf{g}_j, \quad j = 0, \ldots, m$$
$$\partial^2 \mathbf{f}(0) = \partial^2 \mathbf{f}(m) = 0.$$

Die Daten in der Abbildung sind von der Kurve $[t^3 - t; t]$ abgegriffen.



Die äquidistante Parametrisierung ist nur geeignet, wenn die Interpolationspunkte ungefähr gleiche Abstände haben. Im allgemeinen Fall ist die *chordale Parametrisierung* vorzuziehen. Dabei fordert man, dass sich die Abstände der Stützstellen wie die Abstände der Interpolationspunkte verhalten,

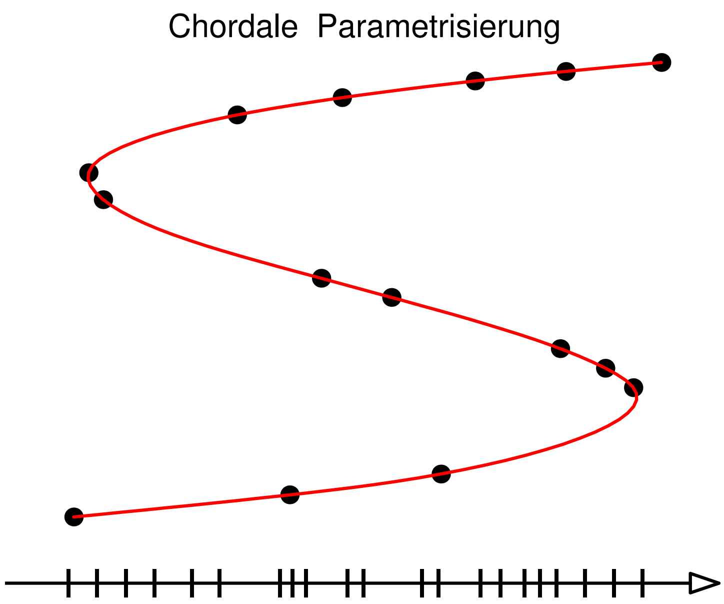
$$\frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} = \frac{\|\mathbf{g}_{j+1} - \mathbf{g}_j\|}{\|\mathbf{g}_j - \mathbf{g}_{j-1}\|}.$$

O.B.d.A setzt man $u_1 = 0$ und

$$u_j = \sum_{k=2}^{j} \|\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}\|.$$

Anschließend kann die Stützstellenfolge affin transformiert werden.

Beispiel: Natürlicher kubischer Splineinterpolant für chordale Parametrisierung, Daten wie zuvor.

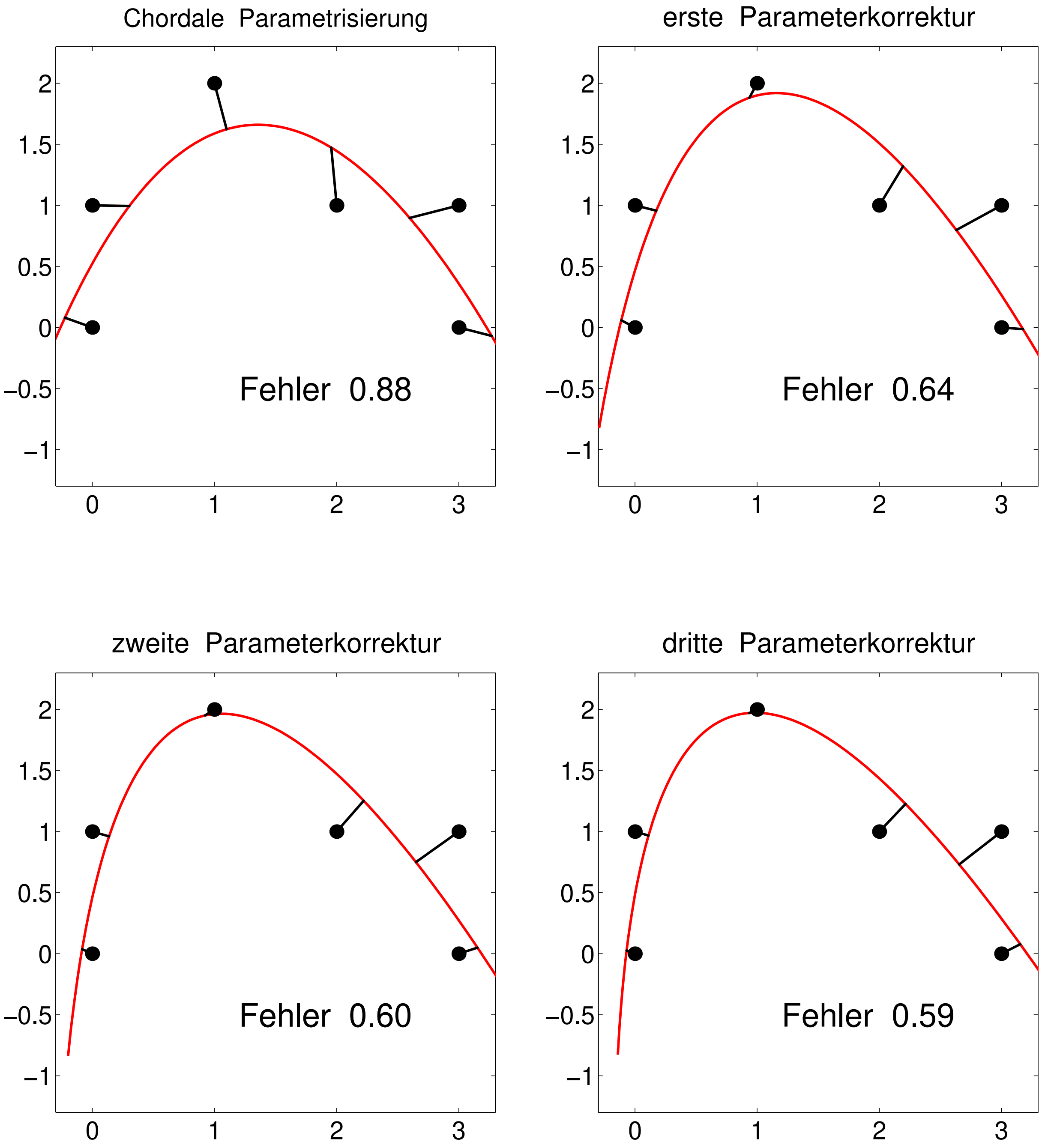


Approximation einer geordneten Punktfolge:

Die Punktfolge
$$\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_M \;\in \mathbb{R}^d$$
soll durch einen Spline $\mathbf{f} = \sum_j b_j^n \mathbf{f}_j$ approximiert werden. Dazu wählt man zunächst wieder eine geeignete Stützstellenfolge, z.B. die chordale Parametrisierung, und minimiert dann
$$\sum_{j=1}^{M} \|\mathbf{f}(u_j) - \mathbf{g}_j\|^2.$$
Dies entspricht der Lösung des Approximationsproblems getrennt für jede Koordinate, also
$$A^T A \mathbf{F} = A^T \mathbf{G}$$
wie zuvor.

Das Ergebnis kann anschließend iterativ durch *Parameterkorrektur* verbessert werden. Die Idee dabei ist, dass für eine optimale Wahl der Stützstellen der Fehler $\mathbf{g}_j - \mathbf{f}(u_j)$ senkrecht zu $\mathbf{f}'(u_j)$ ist. Man ersetzt deshalb u_j durch $u_j + h_j$ und bestimmt h_j näherungsweise aus
$$\langle \mathbf{g}_j - \mathbf{f}(u_j + h_j), \mathbf{f}'(u_j + h_j) \rangle = 0.$$
Linearisierung durch Taylorentwicklung liefert dafür
$$h_j \approx \frac{\langle \mathbf{g}_j - \mathbf{f}(u_j), \mathbf{f}'(u_j) \rangle}{\langle \mathbf{f}'(u_j), \mathbf{f}'(u_j) \rangle - \langle \mathbf{g}_j - \mathbf{f}(u_j), \mathbf{f}''(u_j) \rangle}.$$
Bei iterierter Anwendung verbessert das Verfahren die Approximation in den ersten Schritten in der Regel deutlich. Das Konvergenzverhalten ist allerdings nicht immer zufriedenstellend.

Beispiel: Approximation von sechs Punkten durch eine quadratische Kurve, beginnend mit der chordalen Parametrisierung:



Geometrische Interpolation mit Polynomen:

Wieviele Punkte in $\mathbb{R}^d$ kann man mit einer Bézierkurve der Ordnung n interpolieren, wenn weder die Stützstellen noch eine Ordnung vorgegeben sind?

$$\mathbf{c}(t_j) = \mathbf{g}_j, \quad j = 1, \ldots, N, \quad t_j \in \mathbb{R} \quad \text{beliebig.}$$

Die Anzahl der *freien Parameter* ist $dn + N$ (Kontrollpunkte + Stützstellen). Allerdings können zwei Stützstellen fest vorgegeben werden, da die Parametrisierung beliebig verschoben und skaliert werden kann. Es bleiben also $dn + N - 2$ Freiheitsgrade.

Die Anzahl der *Interpolationsbedingungen* ist dN. Es können also Lösungen erwartet werden für

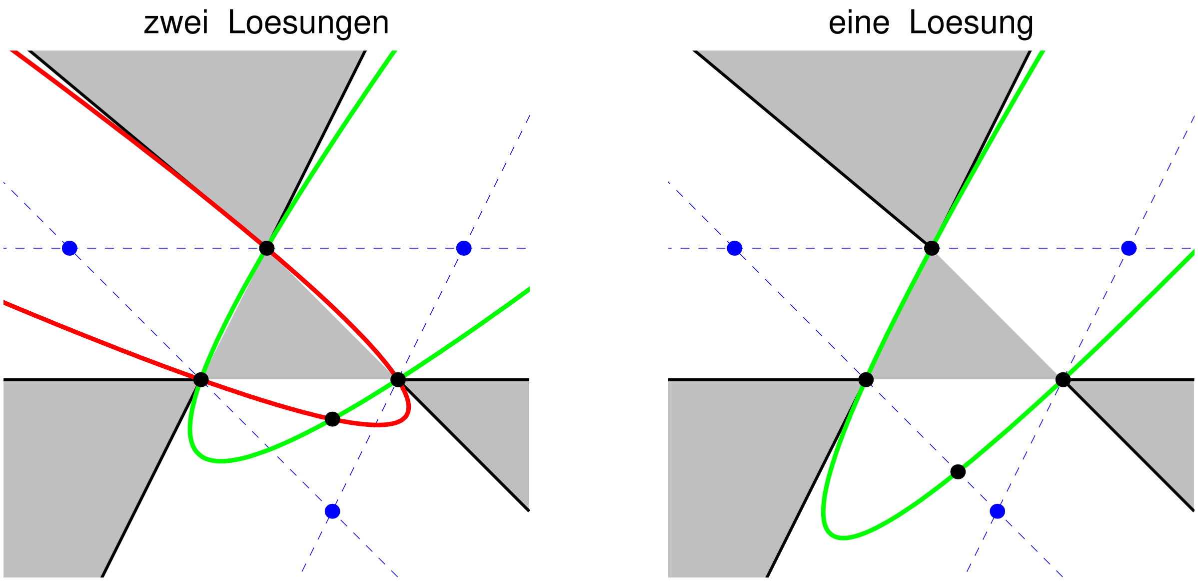
$$dn + N - 2 \geq dN \;\Rightarrow\; N \leq \frac{dn - 2}{d - 1}.$$

Insbesondere ergibt sich im ebenen Fall, $d = 2$,

$$N \leq 2n - 2.$$

Das Interpolationsproblem ist allerdings nichtlinear, so dass die Lösbarkeit nicht allgemein garantiert werden kann. Beispielsweise lassen sich die vier Ecken eines Quadrats nicht mit einer quadratischen Kurve (Parabel) interpolieren.

Das Interpolationsproblem für vier paarweise verschiedene Punkte $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_4 \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann nicht mit einer quadratischen Kurve lösbar, wenn $\mathrm{conv}(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_4)$ ein Dreieck oder ein Parallelogramm ist. Anderenfalls gilt: Wenn die konvexe Hülle ein Trapez ist, dann gibt es eine Lösung, ansonsten gibt es immer genau zwei Lösungen.



Sei $\mathbf{g}$ eine glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit Krümmung $k(0) \neq 0$. Dann gibt es ein $H > 0$, so dass das Interpolationsproblem

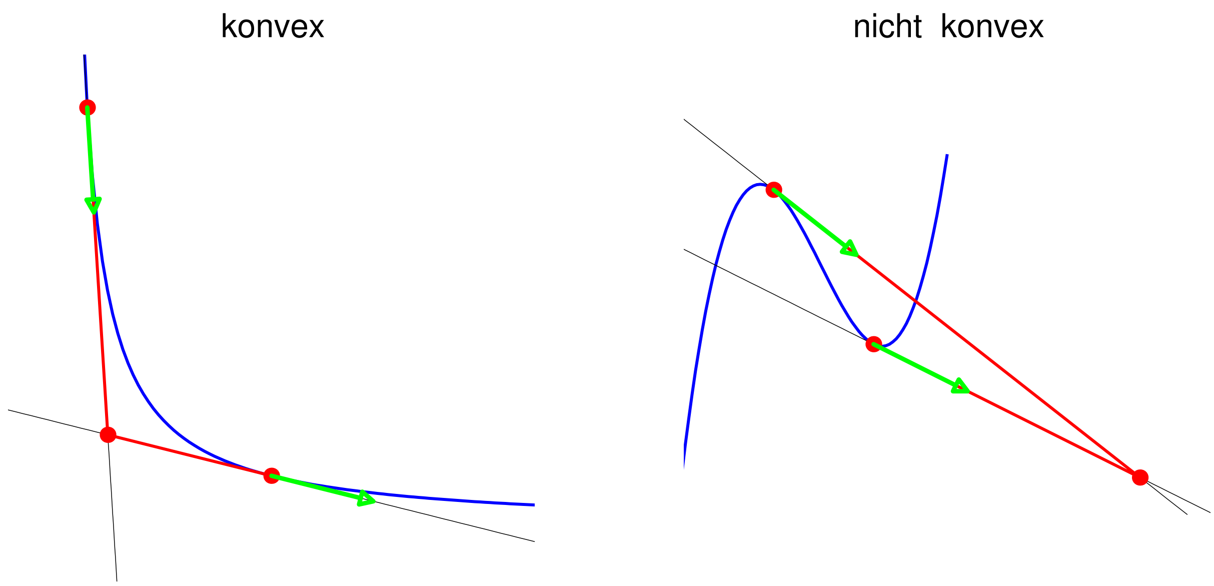
$$\mathbf{g}_j = \mathbf{g}(h_j), \quad |h_j| < H, \quad j = 1, \ldots, 4$$

mit einer quadratischen Kurve $\mathbf{c}$ lösbar ist.

Geometrische Hermite-Interpolation: Man versucht, in den Interpolationspunkten zusätzlich weitere *geometrische* Größen (z.B. Tangentenrichtung, Krümmung) zu interpolieren. Dies entspricht dem Zusammenfallen von Interpolationspunkten.

Mit einer quadratischen Kurve können prinzipiell an zwei Punkten Ort und Tangentenrichtung interpoliert werden.

Konstruktion: Man erhält das Kontrollpolygon der Bézierdarstellung durch Schnitt der Tangenten.
Problem: In der Nähe von Wendepunkten müssen die Tangenten keinen Schnittpunkt haben, bzw. der Schnittpunkt kann sehr weit entfernt sein, so dass keine sinnvolle Approximation entsteht.



Mit einer kubischen Kurve können prinzipiell an zwei Punkten Ort, Tangentenrichtung und Krümmung interpoliert werden,

$$\mathbf{g}(0),\ \mathbf{g}(h),\ \mathbf{t}(0),\ \mathbf{t}(h),\ \kappa(0),\ \kappa(h).$$

Konstruktion: Man erhält die Kontrollpunkte $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_4$ der Bézierdarstellung wie folgt:

- Die Randkontrollpunkte sind

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{g}(0), \quad \mathbf{f}_4 = \mathbf{g}(h).$$

- Die Interpolation der Tangentenrichtungen erhält man durch

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2 &= \mathbf{g}(0) + \lambda_0 \mathbf{t}_0, \quad \lambda_0 > 0, \quad \|\mathbf{t}_0\| = 1 \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{g}(h) - \lambda_1 \mathbf{t}_1, \quad \lambda_1 > 0, \quad \|\mathbf{t}_1\| = 1. \end{aligned}$$

- Die freien Parameter λ_0, λ_1 verwendet man zur Interpolation der Krümmungen. Sie werden zunächst skaliert gemäß

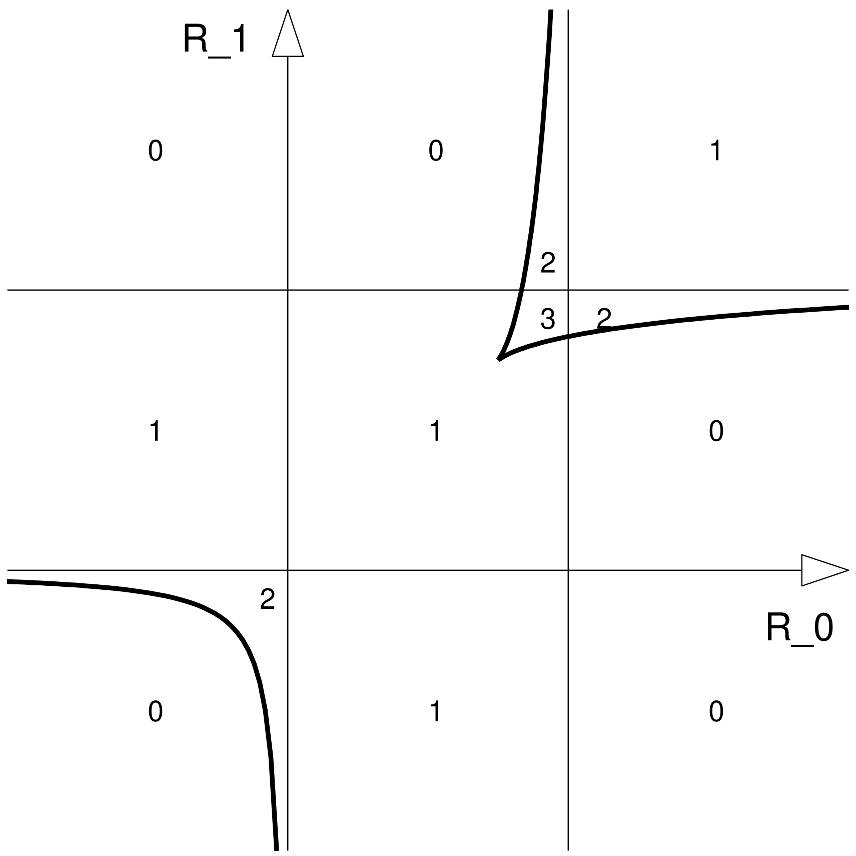
$$\lambda_0 = \mu_0 \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{t}_1}{\mathbf{t}_0 \times \mathbf{t}_1}, \quad \lambda_1 = \mu_1 \frac{\mathbf{t}_0 \times \mathbf{d}}{\mathbf{t}_0 \times \mathbf{t}_1}.$$

  Die neuen Parameter sind Lösung des polynomialen Gleichungssystems

$$\mu_0 = 1 - R_1 \mu_1^2, \quad \mu_1 = 1 - R_0 \mu_0^2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &:= \mathbf{g}(h) - \mathbf{g}(0) \\ R_0 &:= \frac{3}{2} \frac{\kappa(0)\,(\mathbf{d} \times \mathbf{t}_1)^2}{(\mathbf{t}_0 \times \mathbf{d})(\mathbf{t}_0 \times \mathbf{t}_1)^2} \\ R_1 &:= \frac{3}{2} \frac{\kappa(h)\,(\mathbf{t}_0 \times \mathbf{d})^2}{(\mathbf{d} \times \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_0 \times \mathbf{t}_1)^2}. \end{aligned}$$

Die folgende Grafik zeigt die Anzahl der zulässigen Lösungen in Abhängigkeit von R_0, R_1.



Ist $\kappa(0) \neq 0$ und h klein, dann kann man zeigen, dass

$$R_0 \approx R_1 \approx \frac{3}{4}.$$

Das Interpolationsproblem ist also lokal lösbar. Man kann zeigen, dass der Approximationsfehler die Ordnung $O(h^6)$ hat.

Geometrische Taylorentwicklung Durch Umparametrisierung kann versucht werden, die Approximationsordnung einer Taylor-Entwicklung mit Polynomen der Ordnung n zu verbessern. Zählt man wieder Bedingungen und Freiheitsgrade, dann erhält man in $\mathbb{R}^2$ potenziell eine Approximation der Ordnung $2n-2$, also

$$\|\mathbf{g}(\phi(t)) - \mathbf{c}(t)\| = O(t^{2n-2}).$$

Es kann wieder o.B.d.A. angenommen werden, dass $\mathbf{g}$ die Form

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$$

hat. Die Kurve $\mathbf{g}$ ist also lokal der Graph der Funktion

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \, x^j.$$

Die gesuchte Approximation $\mathbf{c}$ hat Koordinatenfunktionen

$$x(t) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \, t^j, \quad y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \, t^j.$$

Es kann o.B.d.A. angenommen werden, dass

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Der Fehler, der für ein gegebenes t gemacht wird, ist also

$$\Delta(t) := f\big(x(t)\big) - y(t).$$

Die verkettete Funktion $f\bigl(x(t)\bigr)$ lässt sich wieder als Potenzreihe darstellen,

$$f\bigl(x(t)\bigr) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, t^j,$$

wobei die Koeffizienten a_j von der Wahl des Polynoms $x(t)$ sowie von der gegebenen Funktion f abhängen. Für den Fehler erhält man

$$\Delta(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - y_j)\, t^j + \sum_{j=n}^{\infty} a_j\, t^j.$$

Setzt man

$$y_j = a_j, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

so kann man bei gegebener Funktion $x(t)$ immer erreichen, dass die ersten n Taylor-Koeffizienten des Fehlers verschwinden. Man versucht nun, das Polynom $x(t)$ so zu wählen, dass möglichst viele weitere Koeffizienten verschwinden,

$$a_n = a_{n+1} = \cdots = a_N = 0.$$

Dies liefert dann einen Fehler der Ordnung $N+1$. Da $n-2$ Freiheitsgrade zur Verfügung stehen, kann im Allgemeinen bestenfalls $N = 2n - 3$ erreicht werden.

Jeder Koeffizient a_j ist ein Polynom in den Variablen $x_2, \ldots, x_{n-1}$, dessen Koeffizienten von $f_2, \ldots, f_j$ abhängen. Für $N = 2n - 3$ erhält man somit ein polynomiales Gleichungssystem mit $n - 2$ Gleichungen zur Bestimmung der $n-2$ Koeffizienten $x_2, \ldots, x_{n-1}$ des Polynoms $x(t)$. Dieses Gleichungssystem hängt nur von den Koeffizienten $f_2, \ldots, f_{2n-3}$ der gegebenen Funktion f ab.

Man erhält damit den folgenden Algorithmus zur geometrischen Taylorapproximation einer Kurve $\mathbf{g}(t) = [t; f(t)]$:

1. Bestimme die Taylorentwicklung von f bis zu Termen der Ordnung $2n - 3$,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2n-3} f_j\, x^j + O(x^{2n-2}).$$

2. Setze

$$x = t + \sum_{j=2}^{n-1} x_j\, t^j$$

und bestimme die Taylor-Koeffizienten a_j der verketteten Funktion $f\big(x(t)\big)$ bis zur Ordnung $2n - 3$,

$$f\big(x(t)\big) = \sum_{j=0}^{2n-3} a_j\, t^j + O(t^{2n-2}).$$

3. Bestimme $x_2, \ldots, x_{n-1}$ als Lösung des polynomialen Gleichungssystems

$$a_n = a_{n+1} = \cdots = a_N = 0$$

für einen möglichst großen Wert der Zahl $N < 2n-2$.

4. Bestimme die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ explizit und setze

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \, t^j.$$

Die Lösbarkeit für $N = 2n-3$ ist bislang für $n = 3$ und $n = 4$ geklärt. Man kann im Allgemeinen nur zeigen, dass Lösungen für $N \approx 4n/3$ existieren.

Für $n = 3$ ist nur eine Gleichung zu lösen,

$$a_3 = 2f_2x_2 + f_3 = 0.$$

Dies ist genau dann möglich, wenn $f_2 \neq 0$ oder $f_2 = f_3 = 0$. Der erste Fall bedeutet geometrisch, dass die Kurvenkrümmung im Entwicklungspunkt nicht verschwindet. Man erhält dann

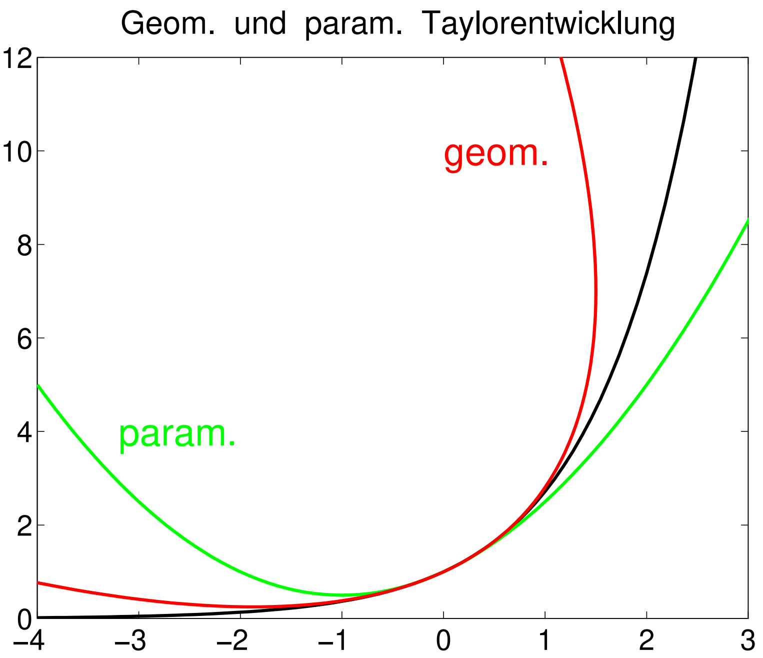
$$x(t) = t - \frac{f_3}{2f_2} t^2$$

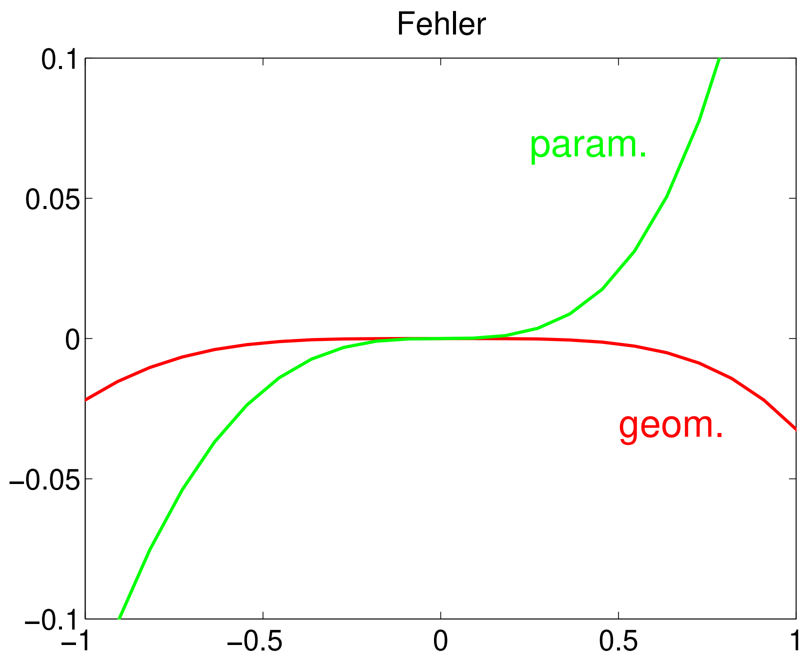
und

$$y(t) = f_0 + f_1 t + \frac{2f_2^2 - f_1 f_3}{2f_2} t^2.$$

Beispiel: Geometrische Taylorentwicklung der e-Funktion liefert

$$x(t) = t - \frac{1}{6}t^2, \quad y(t) = 1 + t + \frac{1}{3}t^2.$$





Für $n = 4$ sind zwei Gleichungen zu lösen. Die Gleichung für a_4 ist

$$f_2 x_2^2 + 3 f_3 x_2 + 2 f_2 x_3 + f_4 = 0.$$

Diese ist linear in x_3 und kann aufgelöst werden, wenn $f_2 \neq 0$,

$$x_3 = -\frac{f_2 x_2^2 + 3 f_3 x_2 + f_4}{2 f_2}.$$

Dies in die Gleichung für a_5 eingesetzt ergibt

$$-\frac{1}{2f_2}\bigl(2f_2^2 x_2^3 + 3 f_2 f_3 x_2^2 + (9 f_3^2 - 6 f_2 f_4) x_2 + 3 f_3 f_4 - 2 f_2 f_5\bigr) = 0.$$

Diese Gleichung ist kubisch in x_2 und besitzt folglich mindestens eine Lösung. Somit ist das Problem lösbar, wenn die Kurvenkrümmung im Entwicklungspunkt nicht verschwindet, d.h. $f_2 \neq 0$.

Beispiel: Geometrische Taylorapproximation des Einheitskreises in einer Umgebung des Punktes $[1/2, \sqrt{3}/2]$. Die Gleichung für a_4 liefert

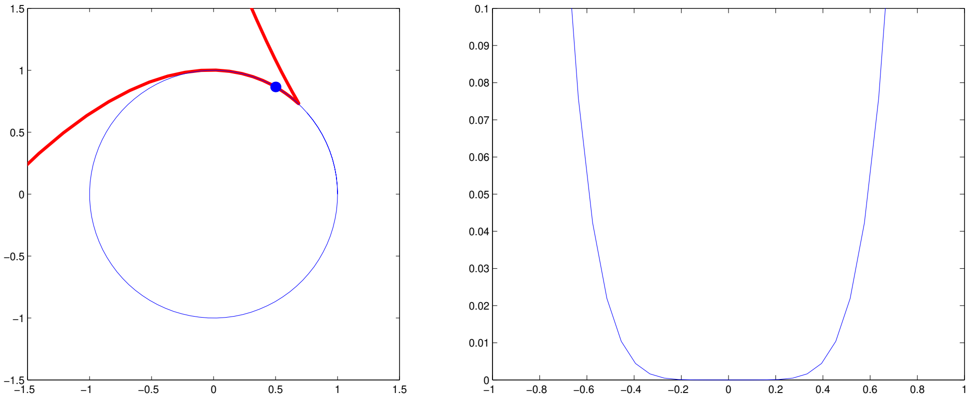
$$x_3 = -\frac{1}{18}(3x_2 + 4)(3x_2 + 2)\,.$$

Damit wird die Gleichung für a_5

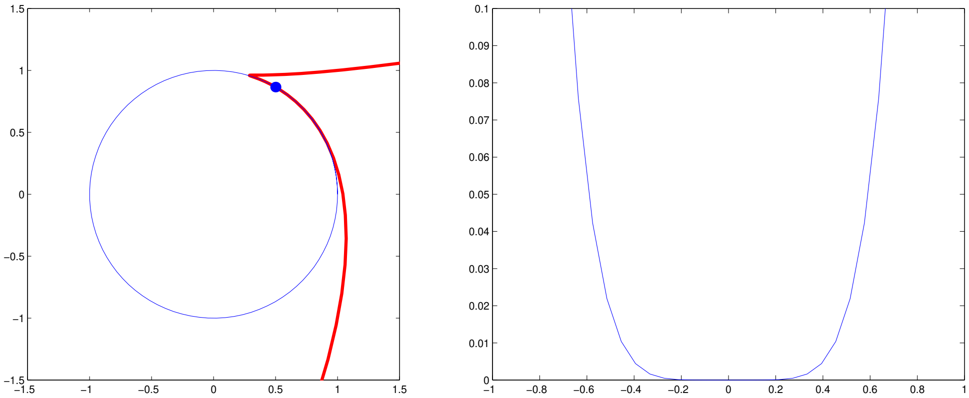
$$\frac{4\sqrt{3}}{243}(3x_2 + 4)(3x_2 - 2)(3x_2 + 1) = 0\,.$$

Diese besitzt drei reelle Lösungen, $x_2 \in \{-4/3, 2/3, -1/3\}$.

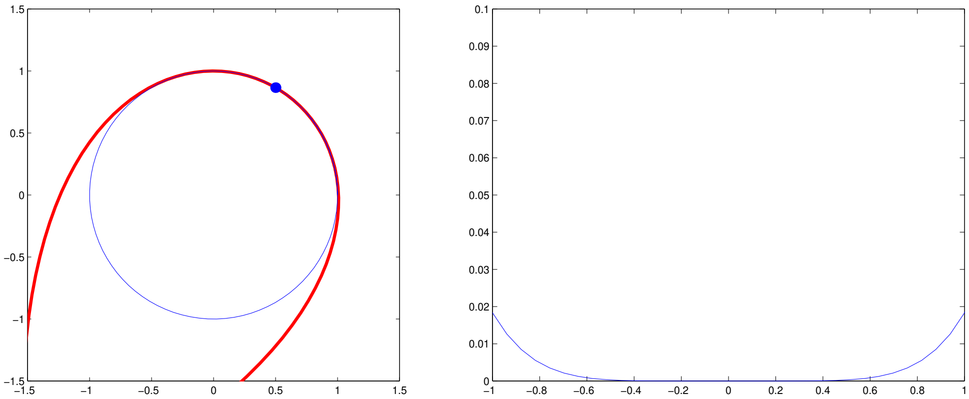
$x_2 = -4/3$:



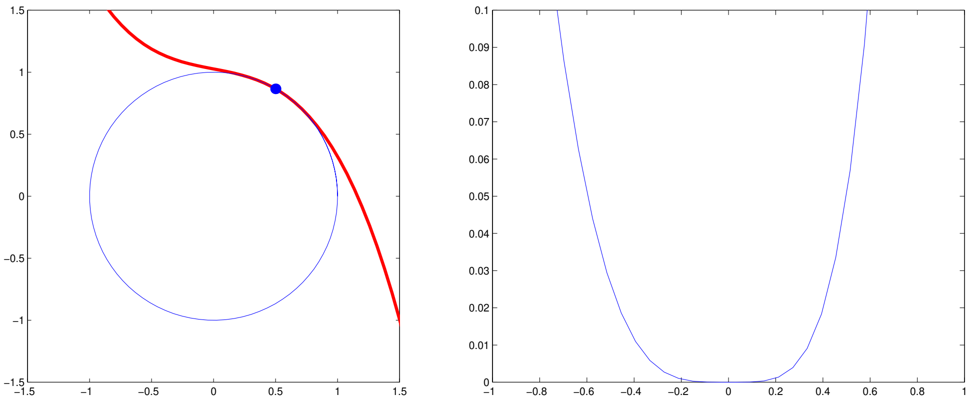
$x_2 = 2/3$:



$x_2 = -1/3$:



parametrisch:



6. Multivariate Approximation

Gesucht: Eine Verallgemeinerung des Splinebegriffs zur Modellierung von Funktionen

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

insbesondere zur Modellierung von Flächen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^d$.

Idee: Betrachte eine Schar von Splinekurven, deren Koeffizienten selbst wieder Splines sind,

$$f(s,t) = \sum_j b_j^n(t) p_j(s) = \sum_j b_j^n(t) \Big(\sum_i b_i^\ell(s) p_{i,j} \Big).$$

Definition: Gegeben seien die Knotenfolgen

$$\begin{aligned} S &: \ \sigma_1, \ldots, \sigma_{k+\ell} \\ T &: \ \tau_1, \ldots, \tau_{m+n} \end{aligned}$$

für Splines der Ordnung ℓ bzw. n. Ein bivariater *Tensorprodukt B-Spline* (TPB-Spline) der Ordnung (ℓ, n) ist definiert durch

$$b_{i,j}^{\ell,n}(s,t) := b_i^\ell(s) b_j^n(t).$$

Ein *Tensorproduktspline* (TP-Spline) in B-Splineform ist gegeben durch

$$f(s,t) = \sum_{i,j} b_{i,j}^{\ell,n}(s,t) p_{i,j} = B^\ell(s)\, P\, B^n(t)^T.$$

Die Koeffizienten $p_{j,k}$ heißen *Kontrollpunkte*, das kanonische Definitionsgebiet ist

$$D(S,T) = D(S) \times D(T).$$

Satz: Seien die Knotenfolgen S und T nichtentartet, dann bilden die TPB-Splines eine linear unabhängige positive Partition der Eins über dem Definitionsgebiet $D(S,T)$.

Beweis: *Lineare Unabhängigkeit:*

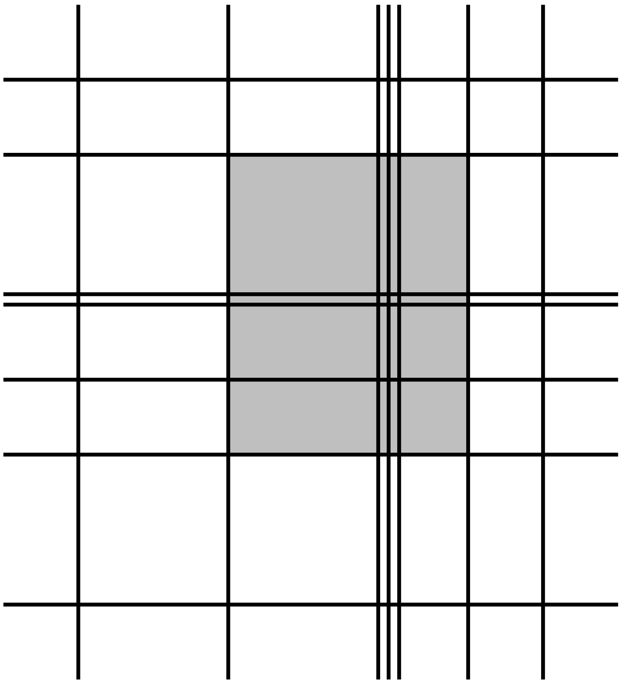
$$0 = \sum_{i,j} b_{i,j}^{\ell,n}(s,t) p_{i,j} = \sum_j b_j^n(t) \Big(\sum_i b_i^\ell(s) p_{i,j} \Big)$$
$$\Rightarrow \sum_i b_i^\ell(s) p_{i,j} = 0 \text{ für alle } j$$
$$\Rightarrow p_{i,j} = 0 \text{ für alle } i, j$$

Partition der Eins:

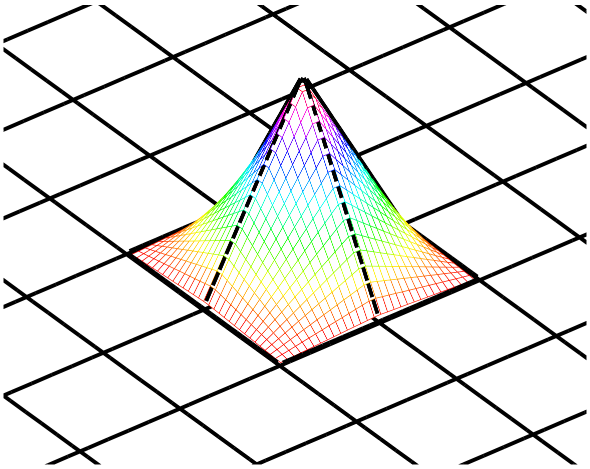
$$\sum_{j,k} b_{j,k}^{\ell,n}(s,t) = \sum_j b_j^n(t) \Big(\sum_i b_i^\ell(s) \Big) = \sum_j b_j^n(t) \equiv 1.$$

TP-Splines sind stückweise polynomial über der durch die Knotenfolgen S und T definierten Partition der Parameterebene. Der Träger des TPB-Splines $b_{i,j}^{\ell,n}$ ist

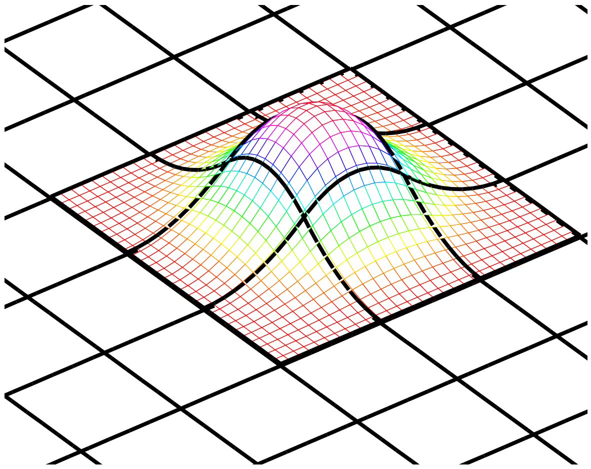
$$\operatorname{supp} b_{i,j}^{\ell,n} = [\sigma_i, \sigma_{i+\ell}] \times [\tau_j, \tau_{j+n}].$$



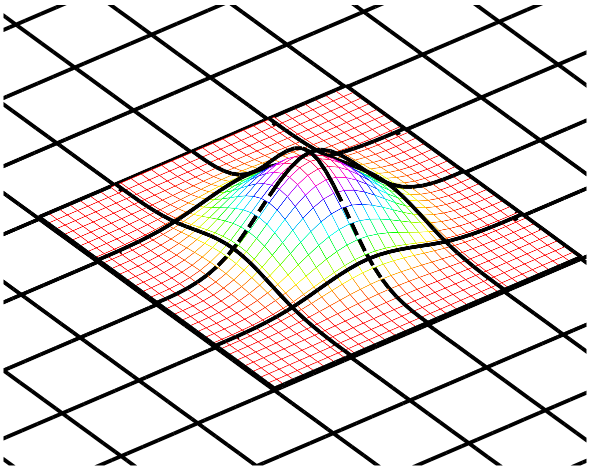
Bilinearer TPB – Spline



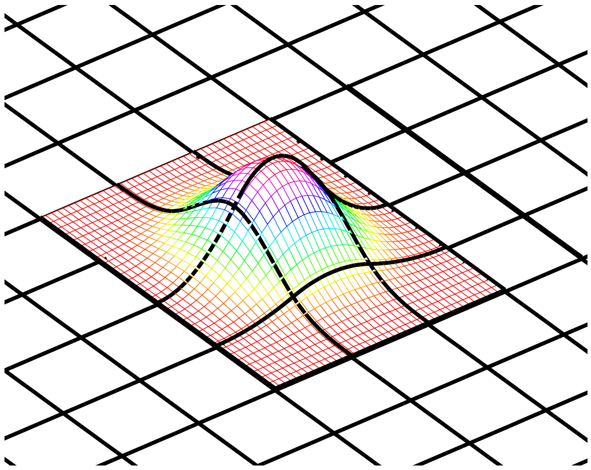
Biquadratischer TPB – Spline



Bikubischer TPB – Spline



TPB – Spline, Grad (2,3)



TP-Splineflächen: Durch bivariate TP-Splines in $\mathbb{R}^3$ lassen sich Flächen modellieren,

$$\mathbf{f}(s,t) = \sum_{i,j} b_{i,j}^{\ell,n}(s,t)\mathbf{p}_{i,j}, \quad \mathbf{p}_{i,j} \in \mathbb{R}^3.$$

Die stückweise geradlinige Verbindung der Kontrollpunkte heißt *Kontrollnetz*.

TP-Splineflächen haben u.A. die folgenden Eigenschaften:

- **Affine Invarianz** Die affine Abbildung der Fläche entspricht der affinen Abbildung der Kontrollpunkte,

$$A\mathbf{f}(s,t) + \mathbf{a} = \sum_{i,j} b_{i,j}^{\ell,n}(s,t)(A\mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{a}).$$

- **Konvexe Hülle** Die Splinefläche liegt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte,

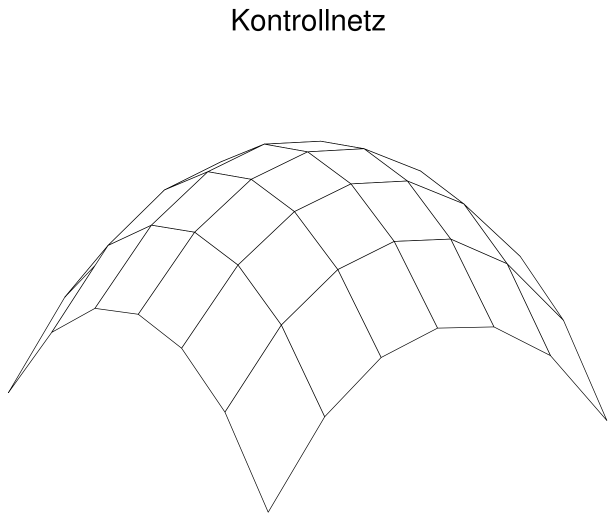
$$\mathbf{f}(D(S,T)) \subset \mathrm{conv}(\mathbf{P}).$$

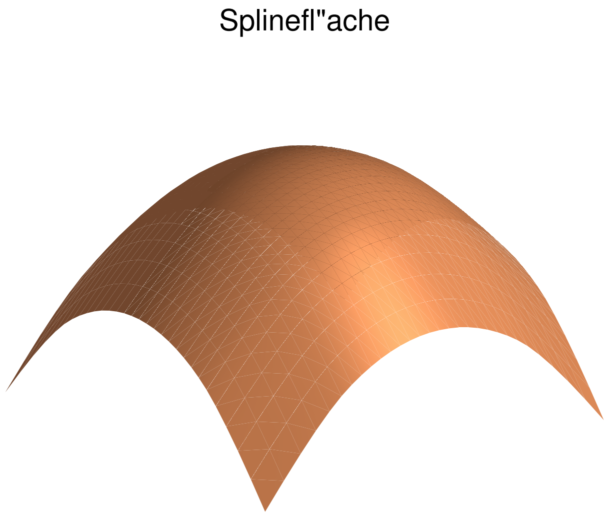
  Lokale konvexe Hülle Ein Flächenstück ("Patch") der Splinefläche liegt in der konvexen Hülle der relevanten Kontrollpunkte,
- **Parameterlinien:** Kurven mit konstantem Parameter t (bzw. s) sind Splinekurven der Ordnung ℓ über S (bzw. der Ordnung n über T).
- **Bilder von Geraden** Das Bild einer Geraden $(\alpha_1 t + \alpha_0, \beta_1 t + \beta_0)$ ist eine Splinekurve der Ordnung $(\ell + n - 1)$.

Beispiele:

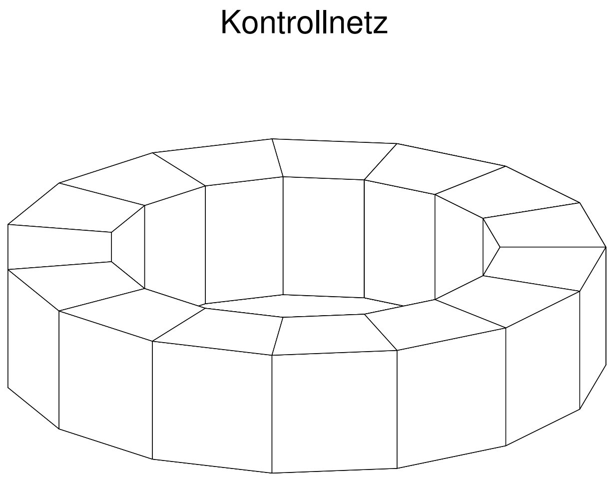
a) Biquadratische Splinefläche mit Knoten

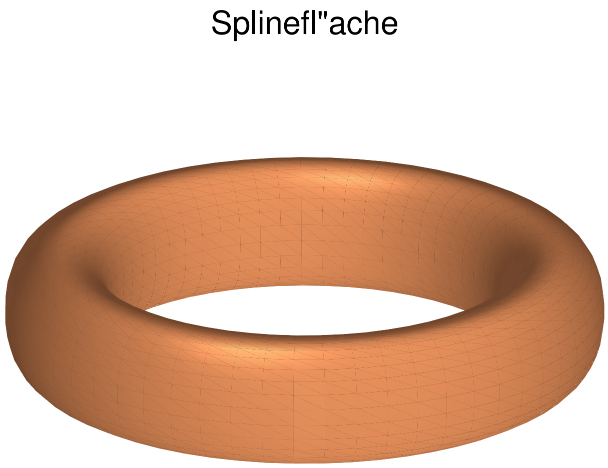
$$T = S = [0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5].$$





b) Geschlossene uniforme bikubische Splinefläche





Auswertung: Zur Auswertung des TP-Splines

$$f(u,v) = B^\ell(u)\, P\, B^n(v)^T$$

berechnet man zunächst $\tilde P = P B^n(v)^T$ durch Auswertung des univariaten Splines $B^n(v) P^T$ an der Stelle v und Transposition. Anschließend erhält man $f(u,v)$ durch Auswertung des univariaten Splines $B^\ell(u)\tilde P$ an der Stelle u.

Dieses Verfahren ist besonders effizient, wenn die Splinefläche auf einem Gitter $U \times V$ ausgewertet werden soll.

Interpolation: Die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit von multivariaten Interpolationsproblemen ist i.A. nur schwer zu beantworten. Einfach ist dagegen der Spezialfall von Daten auf einem Gitter $U \times V$,

$$(u_i, v_j, g_{i,j}), \quad i = 1:k, \quad j = 1:m.$$

Hier löst man das Gleichungssystem

$$B^\ell(U)\, P\, B^n(V)^T = G$$

in zwei Stufen,

$$\tilde P = B^\ell(U)^{-1} G, \quad P^T = B^n(V)^{-1} \tilde P^T.$$

Die Lösung existiert und ist eindeutig, falls die Schoenberg-Whitney-Bedingung in s- und t-Richtung getrennt erfüllt ist .

Diskrete Approximation:

Sind hinreichend viele Daten

$$(u_i, v_i, g_i), \quad i = 1 : M, \quad M \geq km,$$

gegeben, dann löst man das Approximationsproblem

$$\|B^{\ell,n}(W)P - G\| \to \min$$

mittels der Normalengleichung, wobei $w_i = (u_i, v_i)$. Diese hat Dimension $km \times km$.

Sind die Daten wieder auf einem Gitter gegeben,

$$(u_i, v_j, g_{i,j}), \quad i = 1 : K, \quad j = 1 : M,$$

dann kann das Approximationsproblem analog zum Interpolationsproblem in zwei Stufen gelöst werden.

$$\begin{aligned}(B^\ell(U)^T B^\ell(U))\tilde{P} &= B^\ell(U)^T G \\ (B^n(V)^T B^n(V))P^T &= B^n(V)^T \tilde{P}^T.\end{aligned}$$

Zur Glättung bzw. um die eindeutige Lösbarkeit zu garantieren, kann man analog zum Smoothing Spline ansetzen:

$$\alpha \int_D |\Delta f|^2 + (1-\alpha)\,\|f(W) - G\|^2 \to \min, \quad \alpha \in (0,1).$$

Dies führt stets auf ein positiv definites LGS.

Kontinuierliche Approximation:

Zur Approximation einer Funktion $g : D(S,T) \to \mathbb{R}$ minimiert man bezüglich einer Hilbertraum-Norm,

$$\|B^{\ell,n}P - g\| \to \min .$$

Die Lösung ist eindeutig und wie üblich durch das Gram-System

$$AP = G$$

charakterisiert, wobei

$$A_{i,j} = \langle B_i^{\ell,n}, B_j^{\ell,n} \rangle, \quad G_i = \langle B_i^{\ell,n}, g \rangle.$$

Dabei durchlaufen die Indizes den Bereich $1 \leq i, j \leq km$ aller TPB-Splines.

Quasi-Interpolation:

Seien Q^s und Q^t Quasi-Interpolanten der Ordnung λ bzw. ν für die univariaten Splineräume $\mathcal{S}_{\ell,S}$ bzw. $\mathcal{S}_{n,T}$. Dann ist durch

$$Qg := \sum_{i,j} b_{i,j}^{\ell,n} Q_{i,j} g, \quad Q_{i,j} := Q_i^s \circ Q_j^t$$

ein bivariater Quasiinterpolant der Ordnung (λ, ν) definiert, d.h.,

$$Qp = p \quad \text{für alle} \quad p \in \mathbb{P}_{\lambda,\nu}.$$

Beweis:

i) Linearität und Lokalität sind klar.

ii) Sei $p \in \mathbb{P}_{\lambda,\nu}$ ein Polynom der Ordnung λ in der Variablen s und ein Polynom der Ordnung ν in der Variablen t. Dann ist

$$\begin{aligned}
(Qp)(s,t) &= \sum_{i,j} b_i^\ell(s) b_j^n(t) Q_i^s Q_j^t p \\
(Qp)(s,t) &= \sum_i b_i^\ell(s) Q_i^s \sum_j b_j^n(t) Q_j^t p \\
&= \sum_i b_i^\ell(s) Q_i^s p(\cdot, t) = p(s,t).
\end{aligned}$$

iii) Die Funktionale $Q_{i,j}$ sind beschränkt durch

$$\|Q_{i,j}\|_\infty \le \|Q_i^s\|_\infty \|Q_j^t\|_\infty.$$

Lineare Splines über Triangulierungen

Die Unterteilung der Ebene in Rechtecke ist sehr restriktiv. Allgemeiner kann man beliebige Triangulierungen oder Quadrangulierungen betrachten. Basen für die zugehörigen Splineräume sind im Allgemeinen schwer zu konstruieren.

Eine wichtige Ausnahme bilden aber die stückweise linearen Funktionen über einer beliebigen Triangulierung mit Knoten T und Dreiecken D. Eine kanonische Basis ist hier durch die *Hutfunktionen* h_j gegeben. Für jeden Knoten τ_j ist die zugehörige Hutfunktion h_j charakterisiert durch

$$h_j(\tau_k) = \delta_{j,k}.$$

Der Träger von h_j besteht also aus allen Dreiecken, die den Knoten τ_j als Ecke enthalten.

Zur Interpolation einer Funktion g setzt man einfach

$$f = \sum_j h_j g(\tau_j).$$

Nachteil: Der Fehler $f - g$ ist unnötig groß.

Idee: Bestimme ein Skalarprodukt, bezüglich dessen die Hutfunktionen orthogonal sind.

Man setzt für das Skalarprodukt an

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\Delta \in D} \langle f, g \rangle_\Delta,$$

wobei

$$\langle f, g \rangle_\Delta = \int_\Delta w_\Delta f g + \nabla f^T W_\Delta \nabla g.$$

Dabei ist $w_\Delta > 0$ und W_Δ eine positiv definite (2×2)-Martix.

Man bestimmt nun die Gewichte so, dass

$$\langle h_i, h_j \rangle_\Delta = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j$$

für alle Hutfunktionen ist, deren Träger Δ enthält. Dies liefert drei homogene Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten. Für das Einheitsdreieck erhält man

$$w_E = 12, \quad W_E = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Für ein Dreieck mit Ecken

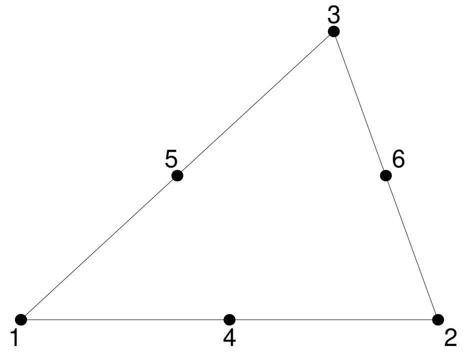
$$\mathbf{p}_0,\ \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{a}_1,\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{a}_2$$

erhält man durch Variablentransformation

$$w_\Delta = 12, \quad W_\Delta = A W_E A^T, \quad A = [\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2]^T.$$

Insbesondere ist W_Δ stets positiv definit.

Eine diskrete Variante erhält man wie folgt:



Für ein Dreieck Δ sei U der Vektor von 6 Stützstellen, der alle Ecken und alle Kantenmitten enthält. Für eine gegebene Funktion f sei Qf das quadratische Polynom, das f an den Stellen U interpoliert. Dann ist

$$\langle f, g \rangle_U := \langle Qf, Qg \rangle_\Delta$$

eine semidefinite Bilinearform, bezüglich der die Hutfunktionen orthogonal sind.

Man erhält nach Skalierung

$$\langle f, g \rangle_U = f(U) M g(U)^T$$

mit

$$M = \begin{bmatrix} 18 & 2 & 2 & -10 & -10 & -2 \\ 2 & 18 & 2 & -10 & -2 & -10 \\ 2 & 2 & 18 & -2 & -10 & -10 \\ -10 & -10 & -2 & 76 & -12 & -12 \\ -10 & -2 & -10 & -12 & 76 & -12 \\ -2 & -10 & -10 & -12 & -12 & 76 \end{bmatrix}$$

unabhängig von der Lage des Dreiecks.

Stabilisierung von TPB-Splines durch Erweiterung

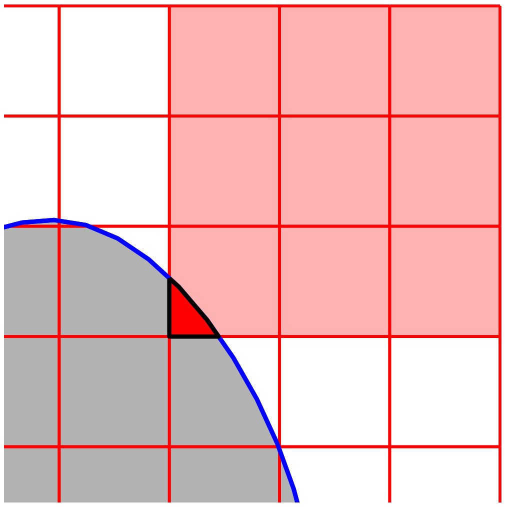
Im Folgenden werden uniforme Tensorprodukt B-Splines der Ordung (n,n) mit Knoten $S = T = h\mathbb{Z}$ betrachtet,

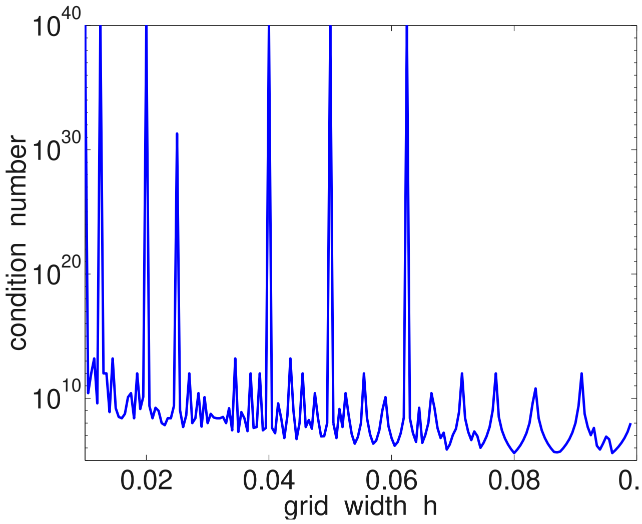
$$b_k(s,t) := b^n_{k_1}(s) b^n_{k_2}(t).$$

Relevant sind nur diejenigen B-Splines, deren Träger das Innere des Definitionsgebiets schneidet,

$$K := \{k \in \mathbb{Z} : \operatorname{meas}(\operatorname{supp} b_k \cap D) > 0\}.$$

Im Allgemeinen ist das Definitionsgebiet D kein Rechteck. "Fitzel" am Rand bewirken dann, dass die Grammatrix u.U. sehr schlecht konditioniert ist und das Approximationsproblem dadurch faktisch unlösbar wird.





Idee: Unterteile die B-Splines in *innere* und *äußere*,

$$I := \{i \in K : Q_\ell \in \operatorname{supp} b_k \cap D\}, \quad J := K \backslash I.$$

Dabei ist die Gitterzelle Q_ℓ gegeben durch $Q_\ell := h([0,1]^2 + \ell)$. Innere B-Splines haben also mindestens eine komplette Gitterzelle ihres Trägers im Definitionsgebiet.

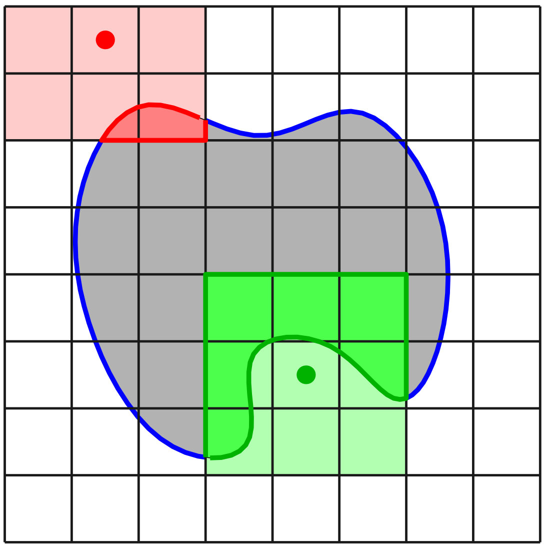
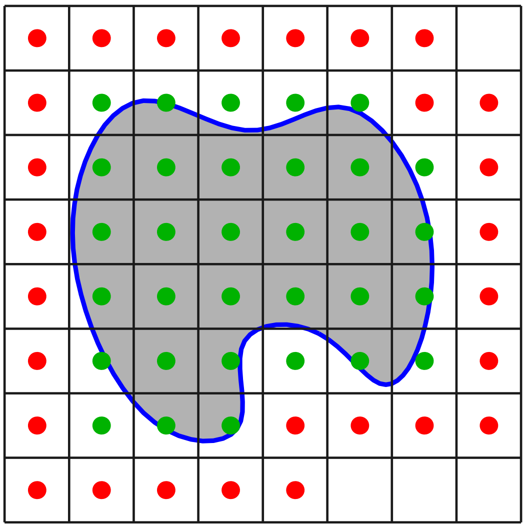
Nun koppelt man die äußeren B-Splines an die inneren B-Splines,

$$b_i^e := b_i + \sum_{j \in J(i)} e_{i,j} b_j$$

und verwendet diese *erweiterten B-Splines* als Basisfunktionen.

Anforderungen:

- Der Träger der erweiterten B-Splines darf nicht übermäßig wachsen.
- Alle Polynome der Ordnung (n, n) müssen durch erweiterte B-Splines darstellbar sein.

Zu 1: Man definiert die komplementäre Indexmenge

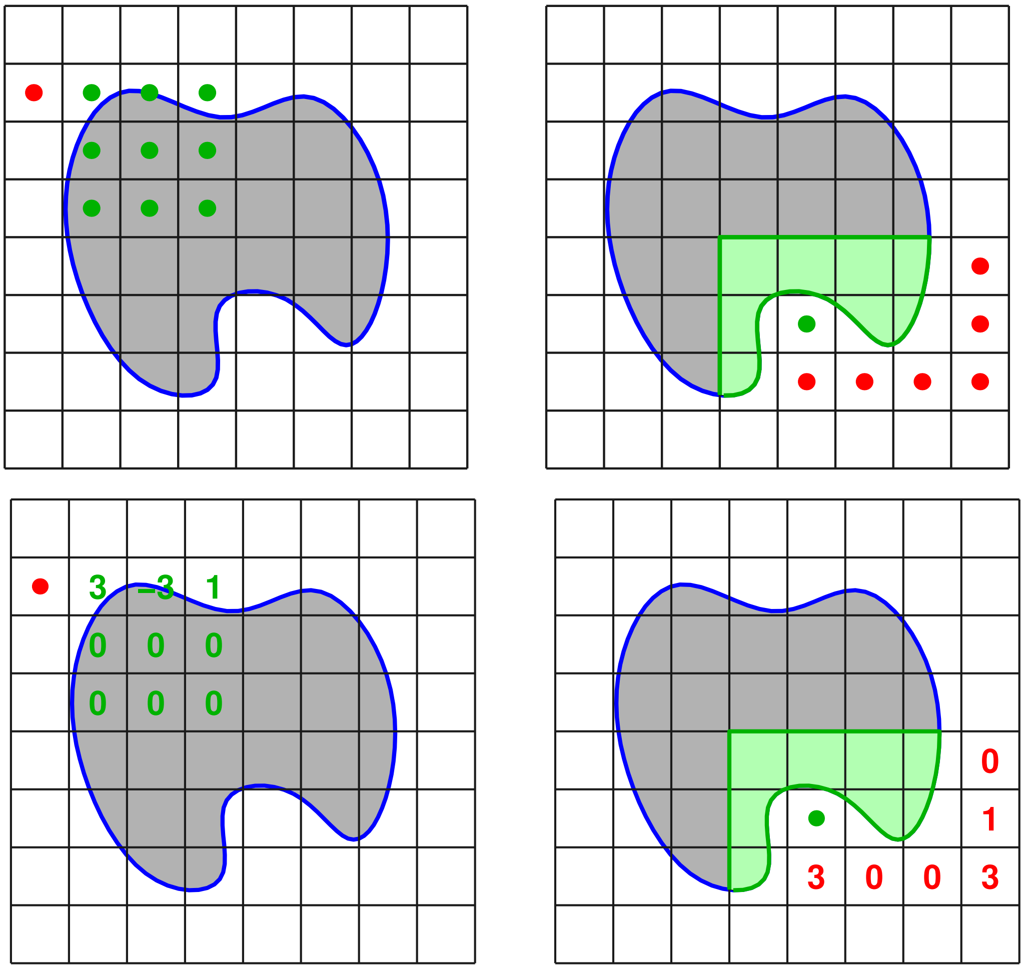
$$I(j) := \{i \in I : j \in J(i)\}.$$

Dies sind also diejenigen inneren B-Splines, an die der äußere B-Spline b_j angekoppelt ist. Nun wählt man $I(j)$ als das zu j nächstgelegene $(n \times n)$-Array inneren Indizes.

Zu 2: Ein Spline ist genau dann ein Polynom der Ordnung (n, n), wenn die Koeffizienten ein Polynom der Ordnung (n, n) in den Indizs (i, j) sind (Marsden). Deshalb definiert man

$$e_{i,j} := l_i(j)$$

als den Wert des Lagrangepolynoms zu den Stützstellen $I(j)$ mit $l_i(r) = \delta_{r,i}$ an der Stelle j.



Satz: Es gibt Konstanten $r, R \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle Splines $f = \sum_{i\in I} b_i^e f_i$ gilt

$$rh^2 F^T F \le \|f\|_2^2 \le Rh^2 F^T F.$$

Dies impliziert, dass die Kondition der Gramschen Matrix $A_{i,\ell} = \langle B_i, B_\ell \rangle$ gleichmäßig in h beschränkt ist.

Beweis: Für $k \in \{0, \dots, n-1\}^2$ gibt es Polynome λ^k der Ordnung (n, n) mit

$$\int_{k+[0,1]^2} b_i^{n,1}(t)\lambda^k(t)\,dt = \delta_{0,i}.$$

Für $Q_{\ell+k} \in D \cap \operatorname{supp} b_\ell$ setze

$$\Lambda_\ell(t) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}\lambda((t-\ell)/h) & \text{für } t \in Q_{\ell+k}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist

$$\langle b_i^e, \Lambda_\ell(t) \rangle = \delta_{i,k}$$

und

$$\|b_i^e\| \le hc_1, \quad \|\Lambda_\ell\| = \frac{c_2}{h}.$$

Damit ergibt sich

$$f_\ell^2 = \langle f, \Lambda_\ell \rangle_{Q_{\ell+k}}^2 \le \|f\|_{Q_{\ell+k}}^2 \frac{c_2^2}{h^2}$$

und

$$F^T F \le \|f\|^2 \frac{c_3}{h^2}.$$

Ferner ist mit der Gramschen Matrix A

$$\|f\|^2 = F^T AF.$$

Die Zeilensummennorm und damit auch der größte Eigenwert von A ist beschränkt durch

$$\lambda_{\max} \leq \|A\| \leq c_4 h^2.$$

Damit ergibt sich $F^T AF \leq c_4 h^2 F^T F$ und

$$\frac{h^2}{c_3} \leq \frac{\|f\|^2}{F^T F} \leq c_4 h^2.$$

Least Squares Approximation mit erweiterten B-Splines: