Aufgabe 8

Claudia Möller

(Fall iii) vom Beweis des Nullstellensatzes)

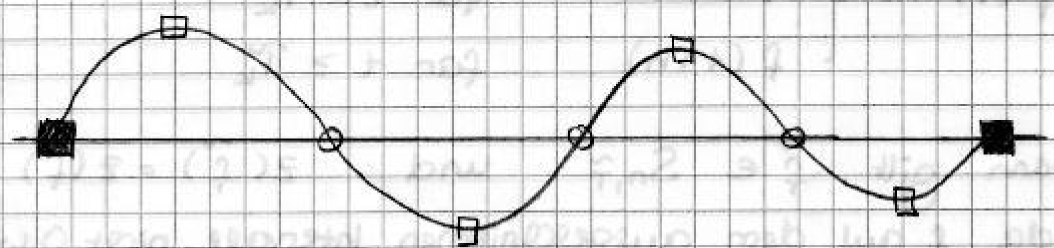
iii) Die inneren Knoten sind höchstens $n-2$-fach.

a) Annahme: Die Randknoten sind nicht n-fach.

f ist stetig differenzierbar und stetig.

Nach Annahme gilt $Z(f) \geq m$

Im Bild: $m=3$



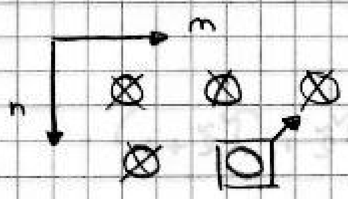
○ NST von f

□ NSt von f'

Es gilt $Z(f') \geq m+1$.

Außerdem $f' \in S_{n-1,T}$

und somit $\dim(S_{n-1,T}) = |T|-(n-1) = m+1$.



Nach Induktionsannahme gilt:

$\exists k: f' \equiv 0$ auf $[\tau_k, \tau_{k+1})$

$\Rightarrow f$ ist konstant auf $[\tau_k, \tau_{k+1})$.

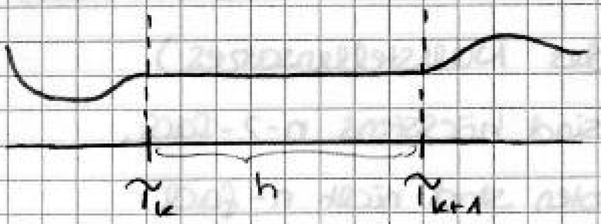
1. Fall

$f \equiv 0$ auf $[\tau_k, \tau_{k+1})$

$\rightarrow$ Fertig

2. Fall

$f \equiv c \neq 0$ auf $[\tau_k, \tau_{k+1})$



$h := \tau_{k+1} - \tau_k$

$\tilde{T} := [\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+2} - h, \dots, \tau_{m+n} - h]$

$|\tilde{T}| = m+n-1$

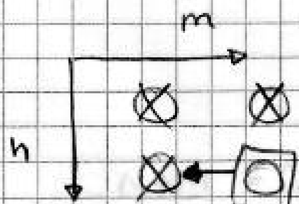
$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} f(t) & \text{für } t < \tau_k \\ f(t+h) & \text{für } t \geq \tau_k \end{cases}$$

Dann gilt $\tilde{f} \in S_{n,\tilde{T}}$ und $Z(\tilde{f}) = Z(f)$

(da f auf dem ausgeschnittenen Intervall nicht 0 war).

Also $Z(\tilde{f}) \geq m \geq m-1$.

$\dim(S_{n,\tilde{T}}) = |\tilde{T}| - n = m-1$



Nach Induktionsannahme gilt:

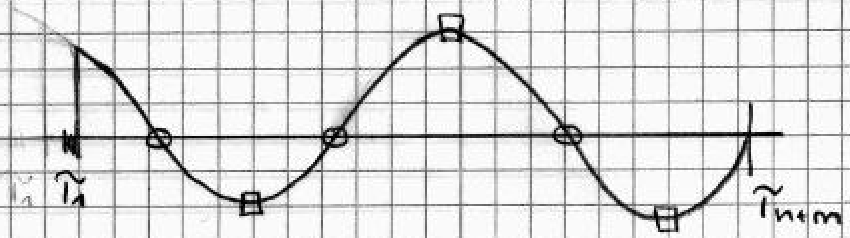
$\exists \tilde{\ell}$, so dass $\tilde{f} \equiv 0$ auf $[\tau_{\tilde{\ell}}, \tau_{\tilde{\ell}+1})$.

Dann folgt nach Konstruktion von $\tilde{f}$, dass es ℓ gibt, so dass $f \equiv 0$ auf $[\tau_\ell, \tau_{\ell+1})$.

b) Es gibt mindestens einen n-fachen Randknoten.

<u>1. Fall</u>: Ein n-faches Randknoten

OBdA τ_1 n-fach, τ_n k-fach mit $k<n$.



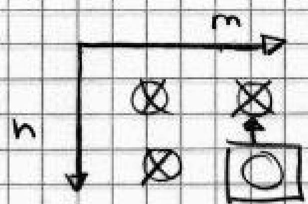
Nach Annahme gilt $z(f) \geq m$.

Wir können folgern, dass $z(f') \geq m$.

Setze $\tilde{T} = T \setminus \{\tau_1\}$.

Dann gilt $f' \in S_{n-1,\tilde{T}}$, da die Vielfachheit von τ_1 beim Ableiten reduziert werden kann.

$\dim(S_{n-1,\tilde{T}}) = |\tilde{T}| - (n-1) = m$



Nach Induktionsannahme gibt es k mit $f' \equiv 0$ auf $[\tau_k, \tau_{k+1})$. (Weiter analog zu a).

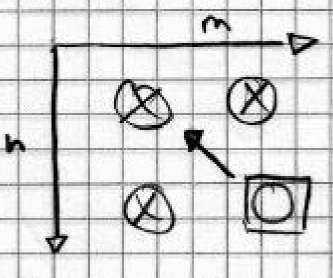
<u>2. Fall</u> Beide Randknoten sind n-fach

$z(f') \geq m-1$

$\tilde{T} = T \setminus \{\tau_1, \tau_{n+m}\}$

Dann gilt $f' \in S_{n-1,\tilde{T}}$.

$\dim(S_{n-1,\tilde{T}}) = m-1$



(Weiter analog zu a).