# 1 Aufgabe 5

Wir werden zur Lösung der Aufgabe folgende Sätze aus dem Skript verwenden:

**Satz 1.1.** *Das Interpolationsproblem $(U, G)$ ist (bei Anzahl der Stützstellen = Dimension des linearen Funktionenraumes) genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt:*

$$G = 0 \Longrightarrow f = 0$$

**Satz 1.2.** *Ist $f \in S_{n,T}$ ein Spline im Splineraum der Dimension $n$ und einer nichtentarteten Knotenfolge der Länge $n+m$ mit mindestens $m$ Nullstellen, so gibt es ein Segment auf dem $f$ verschwindet*

Sei nun also $f \in L\ddot{o}s(U, 0)$ bei gegebenen $U, G, T$ wie in der Aufgabenstellung. Nach Voraussetzung ($f(\tau_j) = 0 \forall j$) gilt $z(f) \geq m$, und also nach Satz 2 $f = 0$ auf einem Segment $[\tau_k, \tau_{k+1})$. Wir zeigen nun iterativ/induktiv, dass $f = 0$ auf dem gesamten Definitionsbereich. Wir teilen jeweils die gerade betrachtete Knotenfolge in $T_l = \tau_{anfang}, ..., \tau_k$ und $T_r = \tau_{k+1}, ..., \tau_{ende}$ (im ersten Schritt $anfang = 1$ und $ende = m + n$) mit $[\tau_k, \tau_{k+1})$ wie oben das Segment, auf dem $f$ verschwindet. Ebenso teilen wir den Spline in $f_l$ und $f_r$ auf letztgenannten Knotenfolgen. Nach Voraussetzung - $b_j(u_j) > 0 \forall j$ - gilt $z(f_l) \geq k$ und $z(f_r) \geq n + m - k$ und damit ist unsere Induktion fertig.

Also ist $f = 0$ - nach unserer Annahme $G = 0$ und nach Satz 1 folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Interpolationsproblems.

Die Bedingung in unserer Version des Satzes von Schoenberg-Whitney ist nicht notwendig, wie man an folgendem Beispiel sieht:

$$n = 2, u_1 = u_2 = 0 \Longrightarrow b_2^2(u_2) = 0$$