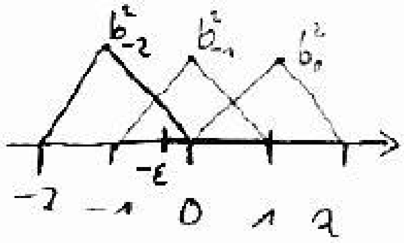
9. Übung

A32: a) Berechnen sie die Gram-Matrix A^2 und bestimmen sie deren Kondition in Abhängigkeit von ε. $n=2$

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \langle b_1^2 | b_1^2 \rangle & \langle b_1^2 | b_2^2 \rangle & \langle b_1^2 | b_3^2 \rangle \\ \langle b_2^2 | b_1^2 \rangle & \langle b_2^2 | b_2^2 \rangle & \langle b_2^2 | b_3^2 \rangle \\ \langle b_3^2 | b_1^2 \rangle & \langle b_3^2 | b_2^2 \rangle & \langle b_3^2 | b_3^2 \rangle \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\varepsilon^3 & -\frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 & 0 \\ -\frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\varepsilon-1)^3 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

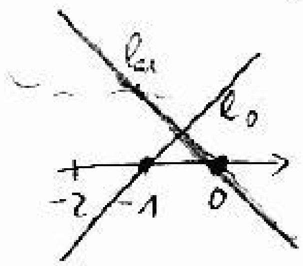
$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\}$$

Um sich das asymptotische Verhalten der Konditionszahl anzuschauen, muss man beispielsweise das charakteristische Polynom betrachten. dabei zeigt sich, das λ_{min} gegen Null geht und weiterhin gilt

$\lambda_\varepsilon \leq \varepsilon^2$ für $\varepsilon \to 0$. Da $\lambda_{max} = \frac{1}{2} + O(\varepsilon)$ gilt, gilt für cond (A):

$$\text{cond } A = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \geq \frac{\frac{1}{2} + O(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \geq \varepsilon^{-2} \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

b) $I = \{-1, 0\}$ $J = \{-2\}$ für $j = -2 \Rightarrow I(j) = \{-1, 0\}$
$J(i) = \{-2\}$



$\ell_{-1}(-2) = 2$
$\ell_0\ (-2) = -1$

$$b_0^e = b_0 + \underbrace{\ell_0(-2)}_{=-1} b_{-2} = b_0 - b_2$$

$$b_{-1}^e = b_{-1} + \ell_{-1}(-2) b_{-2} = b_1 + 2b_{-2}$$

$$A_\varepsilon^{2e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{7}{3}\varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + O(\varepsilon) \\ \frac{1}{6} + O(\varepsilon) & \frac{1}{3} + O(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$A_0^{2e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Für $\varepsilon \to 0$ geht cond $A_\varepsilon^{2e} \not\to \infty$.