# 8. Übung

A30: Geben sie ein Skalarprodukt an, bzgl. dessen die TP-B-Splines der Ordnung $(n,n)$ mit Knoten $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ orthogonal sind.

Es gilt $b_{ij}^{nn}(s,t) = b_i^n(s) \cdot b_j^n(t)$.

gesucht ist $\langle b_{ij}^{nn}(s,t), b_{lk}^{nn}(s,t) \rangle = \delta_{il} \cdot \delta_{jk}$

<u>Ansatz:</u>

$$\langle b_{ij}^{nn}(s,t), b_{lk}^{nn}(s,t) \rangle = \sum_{\mu_1=0}^{n-1} \omega_{\mu_1} \sum_{\mu_2=0}^{n-1} \omega_{\mu_2} \langle \partial^{\mu_1} \partial^{\mu_2} b_{ij}^{nn}, \partial^{\mu_1} \partial^{\mu_2} b_{lk}^{nn} \rangle$$

$$= \sum_{\mu_1=0}^{n-1} \omega_{\mu_1} \sum_{\mu_2=0}^{n-1} \omega_{\mu_2} \iint \frac{\partial^{\mu_1} \partial^{\mu_2} b_i^n(s) b_j^n(t)}{\partial^{\mu_1} s \ \partial^{\mu_2} t} \cdot \frac{\partial^{\mu_1} \partial^{\mu_2} b_l^n(s) b_k^n(t)}{\partial^{\mu_1} s \ \partial^{\mu_2} t} \, ds\, dt$$

$$= \sum_{\mu_1=0}^{n-1} \omega_{\mu_1} \sum_{\mu_2=0}^{n-1} \omega_{\mu_2} \iint \frac{\partial^{\mu_1} b_i^n(s)}{\partial^{\mu_1} s} \frac{\partial^{\mu_1} b_l^n(s)}{\partial^{\mu_1} s} \frac{\partial^{\mu_2} b_j^n(t)}{\partial^{\mu_2} t} \frac{\partial^{\mu_2} b_k^n(t)}{\partial^{\mu_2} t} \, ds\, dt$$

$$= \underbrace{\sum_{\mu_1=0}^{n-1} \omega_{\mu_1} \int \frac{\partial^{\mu_1} b_i^n(s)}{\partial^{\mu_1} s} \frac{\partial^{\mu_1} b_l^n(s)}{\partial^{\mu_1} s} \, ds}_{\text{aus dem univariaten Fall weiß man } = \delta_{il}} \ \underbrace{\sum_{\mu_2=0}^{n-1} \omega_{\mu_2} \int \frac{\partial^{\mu_2} b_j^n(t)}{\partial^{\mu_2} t} \frac{\partial^{\mu_2} b_k^n(t)}{\partial^{\mu_2} t} \, dt}_{= \delta_{jk}}$$

$$= \delta_{il} \, \delta_{jk}$$

Das dies ein Skalarprodukt ist lässt sich leicht zeigen.

$\Rightarrow$ dies ist das gesuchte Skalarprodukt.