Gundula Tischhauser

Aufgabe 24

geg.: f Smoothing-Spline zu Stützstellen u

ges.: $\tilde{\lambda}$, sodass $f(t/q) = \tilde{f}(t)$ Smoothing-Spline zu $q \cdot u$

f minimiert

$$\lambda \cdot \int_{u_1}^{u_M} \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \right\|^2 dt + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{M} \| f(u_j) - g_j \|^2$$

$$q > 0 \ , \quad \tilde{u} = q \cdot u \ , \quad f(t/q) = \tilde{f}(t)$$

$\tilde{f}$ minimiert

$$\tilde{\lambda} \cdot \int_{\tilde{u}_1}^{\tilde{u}_M} \| \tilde{f}''(t) \|^2 dt + (1-\tilde{\lambda}) \sum_{j=1}^{M} \| \tilde{f}(\tilde{u}_j) - g_j \|^2$$

$$x := \frac{t}{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad dt = q\, dx$$

$$\rightsquigarrow \quad \tilde{\lambda} \cdot \int_{\tilde{u}_1}^{\tilde{u}_M} \left\| \frac{1}{q^2} f''\left(\frac{t}{q}\right) \right\|^2 dt + (1-\tilde{\lambda}) \sum_{j=1}^{M} \| f(u_j) - g_j \|^2$$

$$= s \cdot \tilde{\lambda} \cdot \frac{1}{q^3} \cdot \int_{u_1}^{u_M} \| f''(x) \|^2 dx + s \cdot (1-\tilde{\lambda}) \sum_{j=1}^{M} \| f(u_j) - g_j \|^2 \quad \longrightarrow \text{soll minimal werden}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \overset{!}{=} s \cdot \tilde{\lambda} \cdot \frac{1}{q^3} \quad (\mathrm{I})$$

$$(1-\lambda) \overset{!}{=} s \cdot (1-\tilde{\lambda}) \quad (\mathrm{II})$$

Aus (I) folgt: $s = \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} q^3$

Einsetzen in (II): $1-\lambda = \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} q^3 (1-\tilde{\lambda})$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\alpha = \frac{\alpha}{\tilde{\alpha}} q^3 - \alpha q^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\alpha+\alpha q^3}{\alpha q^3} = \frac{1}{\tilde{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha q^3}{\alpha q^3 - \alpha + 1}$$