Aufgabe 16

Gundula Tischhauser

Gegeben: normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$

$Y \subseteq X$ mit $\dim Y = m$

$g \in X$ Funktion

Zu zeigen: $\min\limits_{f \in Y} \|f-g\| \to \min$ stets lösbar

Wir orientieren uns am Beweis des Satzes über die Lösbarkeit diskreter Approximationsprobleme S. 53.

Da wir eine Norm betrachten, gilt $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Es gibt also nur einen trivialen Kern im Raum X.

Also ist keine Zerlegung von X notwendig.

Setze $\delta := \inf\{\|f-g\| : f \in Y\}$

Zu zeigen ist nun, dass das Minimum angenommen wird.

Setze $K(r) := \{f \in Y : \|f\| \leq r\}$

$r := 2\|g\|$

Betrachte $f \notin K(r)$:

$$\|f-g\| \geq \|f\| - \|g\| \underset{\uparrow}{>} r - \|g\| \underset{\uparrow}{=} 2\|g\| - \|g\| = \|g\| = \|0-g\| \underset{\uparrow}{\geq} \delta$$

da $f \notin K(r)$, gilt $\|f\| > r$

$r = 2\|g\|$ nach Definition

entweder ist $f \equiv 0$ schon das Minimum, oder es ist echt größer

Also: Für $f \notin K(r)$ gilt stets $\|f-g\| > \delta$.

Das Infimum wird demnach außerhalb von $K(2\|g\|)$ nicht angenommen.

Damit gilt $\delta = \inf \{ \|f-g\| : f \in K(2\|g\|) \}$

$K(2\|g\|) = \{ f \in Y \mid \|f\| \leq 2\|g\| \}$ ist kompakt, da Y endlich-dimensional ist und $\|\cdot\|$ ist stetig.

Also gilt $\delta = \inf \{ \|f-g\| : f \in K(2\|g\|) \}$

$= \min \{ \|f-g\| : f \in K(2\|g\|) \}$

$= \min \{ \|f-g\| : f \in Y \}$

$\uparrow$

Ausweitung auf ganz Y ist möglich, da das Minimum nur innerhalb der Kugel $K(2\|g\|)$ zu erwarten ist.

δ wird stets angenommen, da $K(2\|g\|)$ kompakt und $\|\cdot\|$ stetig ist.

Damit gilt: $\min_{f \in Y} \|f-g\| \to \min$ ist stets lösbar.

$\square$