4. Übung

22.5.2007

Aufgabe 15: [M]

Gegeben sei das Approximationsproblem mit Daten
$U = [0, 1/2, 1, 3/2, 2]$, $G = [1, -1, 1, 0, 0]$, $T = [-1, 0, 1, 2, 0]$

Menge aller Best-Approximationen bzgl.

- $\|\cdot\|_2$:

Es gilt $A_{j,k} = b_j^2(u_k)$

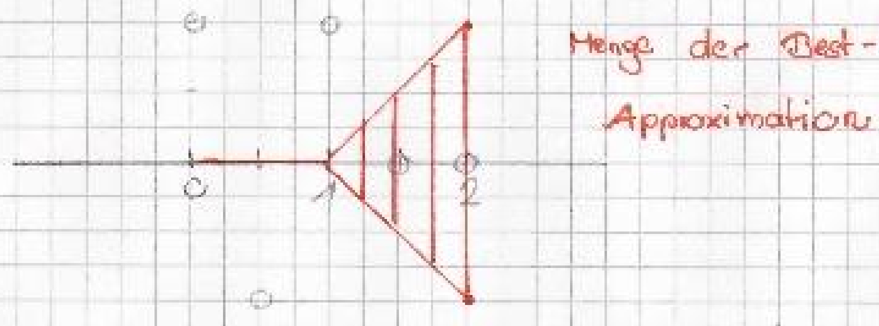
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da $b_1^2(u_1) > 0$ und $b_2^2(u_2) > 0$ ist die Schoenberg-Whitney-Bedingung erfüllt und somit das Approximation bzgl. $\|\cdot\|_2$ eindeutig lösbar. Mit Hilfe der Normalengleichungen lässt sich $AF = G$ lösen.

Auswertung mit Matlab ergibt:

$$F = [\,0.3429,\ 0.2857,\ -0.0571\,]^t$$

- $\|\cdot\|_\infty$:

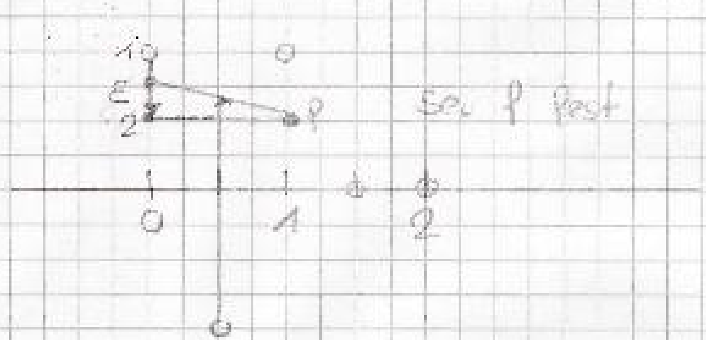


Es gilt: $\quad AF - G = \begin{pmatrix} f_1 - 1 \\ 1/2\, f_1 + 1/2\, f_2 + 1 \\ f_2 - 1 \\ 1/2\, f_2 + 1/2\, f_3 \\ f_3 \end{pmatrix}$

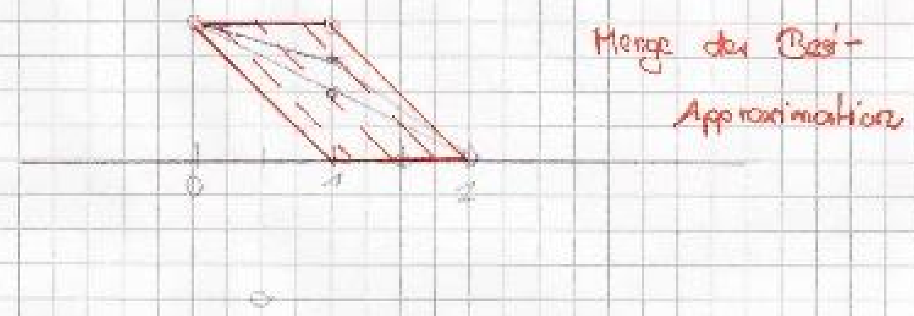
mit $F = [f_1, f_2, f_3]^t$

$\Rightarrow F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in [-1,1] \right\}$

• $\|\cdot\|_1$



Wird der Fehler an der Stelle $u=0$ um $|\varepsilon|$ vergrößert, so verringert sich der Fehler an der Stelle $u=1/2$ nur um $|\varepsilon/2|$. Also ist es sinnvoll für eine Best-Approximation an den Punkten $(0,1)$, $(2,0)$ zu interpolieren.



Verringert man den Fehler an der Stelle $u=1$ um $|\varepsilon|$, so vergrößert sich der Fehler an $u=1/2$ und $u=3/2$ um insgesamt $|\varepsilon|$.

$\Rightarrow F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in [1,2] \right\}$