**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

02.07.2007

# 9. Übung

## Splineapproximation SS 2007

**Aufgabe 31: [M]**
a) Sei $T = \mathbb{Z}$ und $f = B^n F$. Zeigen Sie

$$f \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad F \in \mathbb{P}_n(\mathbb{Z}).$$

*Hinweis:* Verwenden Sie entweder die Marsden-Identität oder die Differenziationsformel.

b) Formulieren und beweisen Sie eine analoge Aussage für uniforme Tensorprodukt-Splines.

Sei in den folgenden Aufgaben $T = \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in (0,1)$ ein Parameter und $D = [-\varepsilon, n-1]$ das Definitionsgebiet für einen Spline $f$ der Ordnung $n$. Ferner bezeichne $B^n$ den Zeilenvektor der Standard-B-Splines und $B^{n,e}$ den Zeilenvektor der erweiterten B-Splines sowie $A^n$ und $A^{n,e}$ die zugehörigen Gram-Matrizen.

**Aufgabe 32: [M]**
a) Berechnen Sie die Gram-Matrix $A^2$ und untersuchen Sie das asymptotische Verhalten der Kondition für $\varepsilon \to 0$.

b) Konstruieren Sie für $n = 2$ die Basis $B^{2,e}$ der erweiterten B-Splines und untersuchen Sie die Gram-Matrix $A^{n,e}$ wie in Teil a).

**Aufgabe 33: [M]**
a) Beschreiben Sie für allgemeines $n$ die Konstruktion der Basis $B^{n,e}$ der erweiterten B-Splines. Die Koeffizienten $e_{i,j}$ müssen dabei nicht explizit angegeben werden.

b) Bestimmen Sie die Matrix $E^n$ mit

$$B^{n,e} = B^n E^n.$$

c) Zeigen Sie

$$A^{n,e} = (E^n)^{\mathrm{t}} A^n E^n.$$

**Aufgabe 34: [P]**
Erstellen Sie mit Hilfe von Matlab Plots der Kondition von $A^n$ und $A^{n,e}$ in Abhängigkeit von $\varepsilon$ für verschiedene Werte der Ordnung $n$. *Hinweis:* Integrieren Sie beispielsweise segmentweise mit Hilfe des Befehls `quad`.