Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18.06.2007

7. Übung

Splineapproximation SS 2007

Aufgabe 26: [M]
Gegeben seien die diskreten Daten $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_M$ in $\mathbb{R}^d$ sowie das Fehlerfunktional

$$J(\mathbf{F}, U) := \sum_{j=1}^{M} \|B^n(u_j)\mathbf{F} - \mathbf{g}_j\|^2.$$

a) Geben Sie die notwendigen Bedingungen für ein Mimimum von J an.

b) Zeigen Sie, dass die Parameterkorrektur nach Hoschek das Minimum unverändert lässt.

c) Geben Sie einen Schritt $(\mathbf{F}, U) \to (\mathbf{F}', U')$ des Newtonverfahrens zur numerischen Bestimmung des Minimums an.

Aufgabe 27: [M]
Gegeben seien die Punkte $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1$ sowie die Vektoren $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ der Länge 1 in $\mathbb{R}^2$. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit des geometrischen Hermite-Interpolationsproblems

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{g}_0,\ \mathbf{f}(1) = \mathbf{g}_1,\ \frac{\mathbf{f}'(0)}{\|\mathbf{f}'(0)\|} = \mathbf{t}_0,\ \frac{\mathbf{f}'(1)}{\|\mathbf{f}'(1)\|} = \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{P}_3^2([0,1]),$$

im Raum $\mathbb{P}_3^2([0,1])$ der ebenen quadratischen Bézier-Kurven an.

Aufgabe 28: [P]
a) Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$[\mathbf{P}, U] = \texttt{Chordal}(\mathbf{G}, n),$$

das zu Punkten $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1; \dots; \mathbf{g}_M]$ in $\mathbb{R}^d$ die bestapproximierende Bézierkurve $B^n\mathbf{P}$ der Ordnung n bei Verwendung der chordale Parametrisierung U der Daten $\mathbf{G}$ bestimmt. Dabei sei die Skalierung so gewählt, dass $u_1 = 0$ und $u_M = 1$.

b) Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$[\mathbf{P}, U, d] = \texttt{ParaCorrect}(\mathbf{P}_{\text{old}}, U_{\text{old}}, \mathbf{G}),$$

das zu einer gegebenen Approximation $B^n\mathbf{P}_{\text{old}}$ mit Stützstellen U_{old} durch Parameterkorrektur eine neue Approximation $B^n\mathbf{P}$ mit Stützstellen U bestimmt. Der Fehler

$$d = \sqrt{\sum_i \|B^n\mathbf{P}(u_i) - \mathbf{g}_i\|^2}$$

soll ebenfalls bestimmt werden. Testen Sie Ihr Programm, indem Sie zum Beispiel M Datenpunkte von einer kubischen Kurve $\mathbf{g}(t)$ abgreifen, $n = 4$ setzen und dann iterieren. In diesem Fall wäre also die exakte Interpolation aller Datenpunkte möglich.