Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28.05.2007

5. Übung

Splineapproximation SS 2007

Aufgabe 18: [M] Verifizieren Sie die Formeln

$$\begin{aligned} g(x) = f(x/a) &\Rightarrow \hat{g}(y) = |a|\hat{f}(ay) \\ g(x) = f(x+a) &\Rightarrow \hat{g}(y) = \exp(iay)\hat{f}(y) \\ g = f \star h &\Rightarrow \hat{g} = \hat{f}\hat{h} \end{aligned}$$

für die Fouriertransformation von glatten Funktionen f und h mit kompaktem Träger.

Aufgabe 19: [M] a) Beweisen Sie die Skalierungsformel

$$w_\mu(n,h) = w_\mu(n)\, h^{2\mu-1}$$

(siehe Skript Seite 62, unten) für die Gewichte der Orthogonalitätsrelation.
b) Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} \partial^\mu b^n(t)\, \partial^\mu b^m(t-x)\, dt = (-1)^\mu \partial^{2\mu} b^{n+m}(x).$$

Aufgabe 20: [M] Die Funktion $g(t) = t^2$ soll durch einen linearen Spline mit Knoten $T = h\mathbb{Z}$ approximiert werden.

a) Bestimmen Sie die Lösung f^h_{int} des Interpolationsproblems mit Stützstellen $u_j = \tau_{j+1}$ und Werten $g_j = g(u_j)$.

b) Bestimmen Sie die Lösung f^h_{ort} des Approximationsproblems bezüglich der orthonormierenden Norm $\|\cdot\|_\Omega$.

c) Berechnen und visualisieren Sie in beiden Fällen die Fehlerfunktion und bestimmen Sie jeweils deren Betragsmaximum.

d) Wieviele Splinekoeffizienten sind jeweils (ungefähr) notwendig, um die gegebene Funktion auf dem Intervall $[0,1]$ mit einer Genauigkeit ε (im Sinne der sup-Norm) zu approximieren?

[$*$]) Bestimmen Sie die Lösung f^h_{opt} des Approximationsproblems bezüglich der sup-Norm und bearbeiten Sie auch dafür die Teile c) und d).

Aufgabe 21: [P] Gegeben sei der Spline $g = B^k Q$ mit Knoten $S = 1 : \ell + k$. Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$[P,T] = \texttt{ReduceSplOrd}(Q,k,n),$$

das zu g den best-approximierenden Spline $f = B^n P$ bezüglich der orthonormierenden Norm für kardinale Splines der Ordnung $n \leq k$ bestimmt. Dabei soll der Knotenvektor T aus fortlaufenden ganzen Zahlen bestehen und das kanonische Definitionsgebiet des gegebenen Splines erhalten bleiben. *Hinweise:* Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 19b. Eine Matrix `Omega` mit den Gewichten $\omega_\mu(n)$ bis zur Ordnung 6 ist auf der Homepage bereitgestellt und kann mit `load Omega` geladen werden.