Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14.05.2007

3. Übung

Splineapproximation SS 2007

Aufgabe 10: [M] a) Was ist falsch an der folgenden Argumentation? Sei Q ein Quasi-Interpolant der Ordnung n, dann gilt

$$(\cdot - \tau)^{n-1} = Q(\cdot - \tau)^{n-1} = \sum_j (Qb_j^n)\psi_j^n(\tau) = \sum_j b_j^n \psi_j^n(\tau).$$

Also erfüllen die Funktionen $\{Qb_j^n\}_j$ die Marsdenidentität und stimmen deshalb mit den B-Splines $\{b_j^n\}_j$ überein,

$$Qb_j^n = b_j^n.$$

Damit ist jeder Quasi-Interpolant maximaler Ordnung ein Projektor.

Aufgabe 11: [M] Gegeben sei die uniforme Knotenfolge $\tau_j = jh$ für Splines der Ordnung 2.
a) Bestimmen Sie die Schar der Gewichte α, β, γ, für die der Quasiinterpolant

$$Qg := \sum_j b_j^2 \big(\alpha g(jh) + \beta g((j+1)h) + \gamma g((j+2)h)\big)$$

maximale Ordnung hat.
b) Bestimmen Sie unter allen Gewichten gemäß Teil a) diejenigen, die $\max_j \|Q_j\|_\infty$ minimieren. Wie lautet die Fehlerabschätzung für $|g(t) - (Qg)(t)|$ in diesem Fall?
c) Bestimmen Sie unter allen Gewichten gemäß Teil a) diejenigen, für die der Fehler

$$\|p - Qp\|_\infty$$

bei Approximation eines quadratischen Polynoms $p \in \mathbb{P}_3$ minimal wird.

Aufgabe 12: [M] a) Gegeben sei die uniforme Knotenfolge $\tau_j = j$ mit Greville-Abszissen μ_j für Splines der Ordnung 3. Bestimmen Sie die Schar der Quasiinterpolanten der Form

$$Qg = \sum_j b_j^3 \big(\alpha g(\mu_j + a) + \beta g(\mu_j + b)\big)$$

mit maximaler Ordnung und diskutieren Sie das Ergebnis.
b) Untersuchen Sie den Grenzübergang $a \to b$.

Aufgabe 13: [P] a) Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$[P, T] = \texttt{LinQuasiInt}(g, \alpha, \beta, \gamma, N),$$

das den linearen Quasiinterpolant $Qg = B^2 P$ mit Knoten

$$T = -h : h : 1 + h, \quad h := 1/N,$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ gemäß Aufgabe 11 berechnet. Dabei ist g ein String mit dem Namen einer Funktion, die mit Hilfe des Befehls `feval` ausgewertet werden kann.
b) Untersuchen Sie die Varianten gemäß 11b) und 11c) anhand der Funktion $g(t) = \sin(\pi t)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.