Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

07.05.2007

2. Übung

Splineapproximation SS 2007

Aufgabe 5: [M] a) Zeigen Sie die folgende Variante des Satzes von Schoenberg-Whitney: Habe T höchstens n-fache Knoten. Das Hermite-Interpolationsproblem (U, G) ist eindeutig lösbar, wenn $b_j(u_j) > 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass diese Bedingung nicht notwendig ist.

Aufgabe 6: [M] a) Zeigen Sie, dass das Interpolationsproblem (U, G) mit $U = u_1\$2, u_2, \ldots, u_{M-1}, u_M\$2$ und paarweise verschiedenen Stützstellen u_j im Splineraum $S_{4,T}$ mit Knoten

$$T = u_1 - 3,\ u_1 - 2,\ u_1 - 1,\ u_1, \ldots, u_M,\ u_M + 1,\ u_M + 2,\ u_M + 3$$

eindeutig lösbar ist.

b) Folgern Sie aus Teil a) die Existenz und Eindeutigkeit des kanonischen kubischen Splineinterpolanten gemäß Skript Seite 39.

Aufgabe 7: [M] a) Sei f ein kubischer Spline mit Knoten T wie in Aufgabe 6 und

$$f(u_1) = \cdots = f(u_M) = 0, \quad f''(u_1) = f''(u_M) = 0.$$

Zeigen Sie $f = 0$, indem Sie den Nullstellensatz auf die Funktion f'' anwenden.

b) Folgern Sie aus Teil a) die Existenz und Eindeutigkeit des natürlichen kubischen Splineinterpolanten gemäß Skript Seite 40.

Aufgabe 8: [M] Betrachten Sie im Beweis des Nullstellensatzes den Fall *iii)* (Skript Seite 42).

a) Formalisieren Sie das Argument des „Ausschneidens“ des Segments $[\tau_k, \tau_{k+1})$.

b) Führen Sie den Induktionsschluss für den Fall durch, dass ein oder zwei Randknoten n-fach sind.

Aufgabe 9: [P]
Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$[F, T] = \texttt{NatSplInt}(U, G),$$

das den natuerlichen kubischen Splineinterpolant $f = B^4 F$ mit Knoten T zu den einfachen Stützstellen U und der Werten G berechnet. *Hinweis:* Es steht ein Programm `sdiff` zum Download bereit, mit dessen Hilfe Sie die Koeffizienten $\tilde{P}$ und die Knoten $\tilde{T}$ der k-ten Ableitung $f^{(k)} = B^{n-k}\tilde{P}$ eines Splines $f = B^n P$ berechnen können, also

$$[\tilde{P}, \tilde{T}] = \texttt{sdiff}(P, T, k).$$