1 Hinweise

1. Nicht aufgeführt sind Säulendiagramm, Histogramm und der Laplacesche Wahrscheinlichkeitsraum. Außerdem fehlt der Stoff von Kapitel 5.
2. Es ist eher zweifelhaft, ob ein stures auswendiglernen der Formeln viel bringt. Eigentlich ziehlt die Vorlesung eher darauf ab, dass bestimmte Konzepte vermittelt werden. Viele der Formeln ergeben sich (ein wenig Verständnis vorausgesetzt) von selbst.
3. **Wichtiger als Formeln sind die in der Vorlesung eingeführten Begriffe (diese sind hier nicht aufgeführt).**
4. Es wird an dieser Stelle weder garantiert, dass diese Formelsammlung vollständig ist, noch dass alle Formeln in der Klausur eine Rolle spielen werden. Natürlich sind auch Fehler nicht auszuschließen.

2 beschreibende Statistik

Eindimensionale Messreihe: $x_1, \ldots, x_n$. $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ ist die aufsteigend sortierte Datenreihe.

1. empirisches Mittel: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
2. Median:
$$Md = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}\right), & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$
3. empirische Spannweite / Variationsbreite: $r = x_{\max} - x_{\min} = x_{(n)} - x_{(1)}$
4. empirische Varianz:
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$
5. empirische Standardabweichung:
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$
6. Variationskoeffizient:
$$V = \frac{s}{\bar{x}}$$
7. Interquartilabstand:
$$IQR = x_{(\lceil \frac{3}{4}n \rceil)} - x_{(\lceil \frac{1}{4}n \rceil)} = 3.\text{ Quartil} - 1.\text{Quartil}$$

Zweidimensionale Messreihe $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

(a) empirische Kovarianz:

$$s_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

(b) Regressionsgerade:

$$\text{Geradengleichung } y = \hat{a}(x - \bar{x}) + \bar{y}$$
$$\text{Steigung } \hat{a} = \frac{s_{x,y}}{s_x^2}$$

(c) empirische Korrelation:

$$r_{x,y} = \frac{s_{x,y}}{s_x \cdot s_y}$$

3 Summen

Für Rechnen mit dem Summenzeichen gelten folgende Regeln:

1. $\sum_{i=k}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=k}^{n} x_i + \sum_{i=k}^{n} y_i$
2. $\sum_{i=k}^{n} \alpha x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i$
3. $\sum_{i=k}^{n} x_i = \sum_{i=k+m}^{n+m} x_{i-m}$

Hiebei sind $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $k < n$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{k, \ldots, n\}$ wobei auch $n = \infty$ und $k = -\infty$ zugelassen sind.

4 Grenzwerte

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und sei $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$, wobei für c auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ möglich sind. Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

und

$$\lim_{x \to c} g(x),$$

so existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{x \to c} (\alpha f(x) + \beta g(x)), \lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x))$$

und es gilt:

1. $$\lim_{x \to c} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x \to c} f(x) + \beta \lim_{x \to c} g(x)$$

2. $$\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$$

Wichtige Grenzwerte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} \alpha &= \alpha \\
\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} &= 0, \text{ falls } \alpha > 0 \\
\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x} &= 0, \text{ falls } \alpha > 0 \\
\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-\alpha x} &= 0, \text{ falls } \alpha > 0
\end{aligned}$$

5 Differential und Integralrechnung

5.1 Integrale

Für Rechnen mit Integralen gelten folgende Regeln:

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. Für $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Hiebei sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und bei f und g handelt es sich um Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5.2 Ableitungen

Für diffenenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$
2. $$(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$
3. $$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Wichtige Ableitungen:

$$\begin{array}{rl}
f(x) = c & f'(x) = 0 \\
f(x) = x^\alpha & f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ falls } \alpha \neq 0 \\
f(x) = e^x & f'(x) = e^x
\end{array}$$

5.3 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, d.h. F ist differnzierbar mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$, und ist f stetig auf $[a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Wichtige Stammfunktionen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 & F(x) &= x \\
f(x) &= x^n & F(x) &= \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ \text{für } n \in \mathbb{N} \\
f(x) &= x^\alpha & F(x) &= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1},\ \text{falls } \alpha \neq -1 \text{ nur definiert für } x > 0 \\
f(x) &= x^{-1} & F(x) &= \ln(x) \\
f(x) &= e^x & F(x) &= e^x
\end{aligned}$$

5.4 Uneigentliche Integrale

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ setzten wir - sofern existent -

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty f(x)dx &= \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx \\
\int_{-\infty}^b f(x)dx &= \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^\beta f(x)dx \\
\int_{-\infty}^\infty f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx
\end{aligned}$$

6 Wahrscheinlichkeitsrechnung

6.1 Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathbf{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω.

1. Für alle $A \subset \Omega$ gilt $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$
2. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0, \mathbf{P}(\Omega) = 1$
3. Für alle $A \subset \Omega$ gilt $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, hierbei ist $\bar{A} = \Omega \setminus A$
4. Für alle $A, B \subset \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
5. Für alle $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mathbf{P}(A_i)$$
6. Für $A, B \subset \Omega$ mit $A \subset B$ gilt $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$
7. Für $A, B \subset \Omega$ mit $A \subset B$ gilt $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$
8. Für $A, B \subset \Omega$ gilt $\mathbf{P}(B \cup A) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$

6.2 Grundformeln der Kombinatorik

Betrachtet wird ziehen von k Elementen aus einer Menge mit n Elementen.

Anzahl Möglichkeiten	Ziehen mit Zurücklegen	Ziehen ohne Zurücklegen
Ziehen mit Berücksichtigung der Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Ziehen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

6.3 Erwartungswerte

1. Sei X eine Zufallsvariable mit Zähldichte $(p_k)_{k\in\{0,\ldots,n}$ (d.h. $\mathbf{P}(X=k)=p_k$ und X nimmt nur die Werte $0,\ldots,n$ mit positiver Wahrscheinlichkeit an), dann berechnet man den Erwartungswert von X durch
$$\mathbf{E}X=\sum_{k=1}^{n} k\cdot p_k.$$
2. Sei X eine Zufallsvariable mit Zähldichte $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, dann berechnet man den Erwartungswert von X durch
$$\mathbf{E}X=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k.$$
3. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f:\mathbb{E}\to\mathbb{R}$, dann berechnet man den Erwartungswert von X durch
$$\mathbf{E}h(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx.$$

Ist $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion, so gelten in den obigen Fällen die Formeln

1. $$\mathbf{E}h(X)=\sum_{k=1}^{n} h(k)\cdot p_k.$$
2. $$\mathbf{E}h(X)=\sum_{k=1}^{\infty} h(k)\cdot p_k.$$
3. $$\mathbf{E}h(X)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cdot f(x)dx.$$

Der Erwartungswert hat folgende Eigenschaften:

1. Für reelle Zufallsvariablen X, Y gilt:

$$X(\omega) \leq Y(\omega) \Rightarrow \mathbf{E}X \leq \mathbf{E}Y$$

2. Für reelle Zufallsvariablen X, Y und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{E}\left(\alpha X + \beta Y\right) = \alpha \mathbf{E}X + \beta \mathbf{E}Y$$

3. Sind X, Y unabhängige reelle Zufallsvariablen, so gilt

$$\mathbf{E}\left(X \cdot Y\right) = \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y$$

Rechenregeln für die Varianz: Sei X eine reelle Zufallsvariable und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt

1. $$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2$$

2. $$\mathbf{V}(\alpha X) = \alpha^2 \mathbf{V}(X)$$

3. $$\mathbf{V}(X + \beta) = \mathbf{V}(X)$$

4. Sind X und Y unabhängig, so gilt

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$$