Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/09
16. Februar 2009

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft"

Lösung zur Aufgabe 45 (3 Punkte)

(a) Wir verwenden folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung: Seien $X_1, \ldots, X_{400}$ unabhängig und identisch $N(\mu, 10)$-verteilt. Über die Realisierungen dieser Zufallsvariablen wissen wir, dass $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 42$. Wir testen also auf

$$H_0 : \mu = 40 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq 40$$

und lehnen H_0 ab, falls $\bar{x}$ sehr weit von 40 abweicht.
Wäre $\mu = 40$, so wäre die Zufallsvariable

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 40\right)$$

standardnormalverteilt (d.h. $N(0,1)$-verteilt).
Es gilt

$$P(|Z| > 1.96) = 0.05$$

und somit ergibt sich

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\bar{x} - \mu_0)\right| = \left|\frac{20}{10}(42 - 40)\right| = 4 > 1.96.$$

was zur Ablehnung von H_0 führt.

(b) Der Test sagt lediglich aus, dass die Ergebnisse der neuen Methode signifikant von den Ergebnissen der alten Methode abweichen. Aus dem Test lässt sich aber nicht schließen, dass das neue Verfahren besser ist als das alte. Dazu hätte ein einseitiger Gauß-Test durchgeführt werden müssen.

(c) Ein Fehler erster Art wäre: Die Unterrichtsmethoden liefern eigentlich die gleichen Leistungsindizes, aber wir kommen durch den Test zum Ergebnis, dass sie deutlich von einander abweichen. Ein Fehler zweiter Art wäre: Die Unterrichtsmethoden liefern eigentlich deutlich unterschiedliche Leistungsindizes, aber unser Test kommt zu dem Ergebnis, dass sie in etwa gleich wären.

Lösung zur Aufgabe 46 (3 Punkte)

Wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung: Seien $X_1, \dots, X_{500}$ unabhängig und identisch $b(1,p)$-verteilte Zufallsvariablen. Dabei setzen wir $X_i = 1$, falls der i-te Haushalt ein geringes Einkommen hat und Null sonst. Über $\bar{x}$ wissen wir, dass $\bar{x} = \frac{190}{500} = 0.38$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz wäre im Falle $\mathbf{E}X_1 = p = 0.35$ die Zufallsvariable

$$Z = \frac{\sqrt{500}}{\sqrt{V(X_1)}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - 0.35 \right)$$

näherungsweise $N(0,1)$ verteilt. Die Varianz von X_1 ist in diesem Fall $p \cdot (1-p) = 0.2275$. Da die Stichprobe schon recht groß ist, approximieren wir hier Z durch die $N(0,1)$-Verteilung (streng genommen müsste man die Varianz durch die empirische Varianz approximieren und einen t-Test durchführen).

Wir lehnen H_0 ab, falls $\bar{x}$ sehr viel größer ist, als 0.35.

Es gilt

$$0.05 = P(Z > 1.64),$$

und somit

$$\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{0.2275}} (0.03) = 46.88 \cdot 0.03 = 1.406 < 1.64.$$

Wir können H_0 nicht ablehnen und somit bestätigt der Test die These nicht.

Lösung zur Aufgabe 47 (3 Punkte)

Die Vorgehensweise beim Test ist genau wie beim zweisetigen Gauß-Test in Aufgabe 45. Nur müssen wir diesmal anstelle der Normalverteilung die t_{n-1}-Verteilung verwenden (hier ist $n = 10$, also verwenden wir die t_9-Verteilung). Diesmal haben wir aber die eigentlich Datenreihe gegeben, müssen also zuerst noch empirisches Mittel und empirische Varianz berechnen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 459.7 \\ s_x^2 &= 747.7888889 \\ s_x &= 27.34572889 \end{aligned}$$

Weiter ist nach dem Hinweis für eine t_9-verteilte Zufallsvariable Z

$$P(|Z| > 2.26) = 0.05.$$

Also

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{10}}{s_x} (\bar{x} - 480) \right| &= \left| \frac{\sqrt{10}}{27.34572889} (459.7 - 480) \right| = |0.1156406426 \cdot (-20.3)| = 2.347505045 \\ &> 2.26, \end{aligned}$$

d.h. H_0 wird abgelehnt werden.