Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/09
6. Februar 2009

13. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 45 (3 Punkte)

Im Rahmen einer Studie soll die Wirksamkeit einer neuen Unterrichtsmethode überprüft werden. Dazu wird die Leistungsfähigkeit der Schüler anhand mehrerer Kriterien beurteilt, die dann zu einem Leistungsindex zusammengefasst werden. Es ist bekannt das nach der herkömmlichen Methode unterrichtete Schüler im Mittel den Leistungsindex 40 erreichen. Die mittlere quadratische Abweichung liegt bei 100. Bei 400 nach der neuen Methode unterrichteten Schülern betrug der Leistungsindex im Mittel 42.
Wir wollen nun wissen, ob die Ergebnisse der neuen Methode überhaupt nennenswert von den Ergebnissen der bisherigen Methode abweicht. Dabei gehen wir davon aus, dass der Leistungsindex normalverteilt ist. Normalerweise müssten wir hierfür (wegen der geschätzten Varianz) einen t-Test durchführen. Da die Stichprobe aber sehr groß ist, können wir hier einen Gauß-Test anwenden.

(a) Führen Sie mit den oben gemachten Angaben einen Gauß-Test bzgl. der Hypothesen

$$H_0 : \mu = 40 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq 40$$

zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch.

(b) Welche Schlussfolgerungen lassen sich aufgrund des Testergebnisses aus Aufgabenteil (a) im Hinblick auf die Wirksamkeit der neuen Unterrichtsmethode ziehen?

(c) Erläutern Sie anhand des Tests in Aufgabenteil (a) die Begriffe „Fehler erster Art“ und „Fehler zweiter Art“.

Hinweis: Für eine standardnormalverteilte (d.h. $N(0,1)$-verteilte) Zufallsvariable Z gilt

$$P(|Z| > 1.96) = 0.05.$$

Aufgabe 46 (3 Punkte)

In Stadt A will der zurzeit amtierende Bürgermeister seine These „die Anteile der Haushalte mit einem geringen Einkommen sind in Stadt A größer als im Durchschnitt (unter allen Deutschen Haushalten)“ statistisch untermauern. Die von ihm beauftragte Soziologin kommt zu dem Ergebnis, dass bei einer Stichprobe von 500 Haushalten bei 190 Haushalten das Haushaltseinkommen als gering anzusehen ist. Der fünf Jahre zuvor erhobene Mikrozensus kam zu dem Ergenis, dass in Deutschland 35% aller Haushalte ein geringes Einkommen haben.
Mittels eines statistischen Tests soll nun auf die Hypothesen

$$H_0 : \mu \leq 0.35 \text{ vs. } H_1 :> 0.35$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$ getestet werden. Wie oben kann auch hier ein Gauß-Test durchgeführt werden.
Bestätigt der Test obige These? Begründen Sie Ihr Ergebnis.
Hinweis: Für eine standardnormalverteilte (d.h. $N(0,1)$-verteilte) Zufallsvariable Z gilt

$$P(Z > 1.64) = 0.05.$$

Aufgabe 47 (3 Punkte)

Ein Autofahrer hat in sein Fahrzeug einen neuen Vergaser einbauen lassen und will jetzt wissen, ob sich der Kraftstoffverbrauch gegenüber früher verändert hat. Bisher konnte er vom Volltanken bis zum aufleuchten der Reserveanzeige durchschnittlich 480 km weit fahren. Mit dem neuen Vergaser konnte er bisher

$$474, 491, 458, 481, 446, 424, 488, 445, 412, 478$$

km weit fahren bis die Reserveanzeige aufleuchtete.
Gehen Sie davon aus, dass obige Werte Realisierungen von unabhängig identisch normalverteilten Zufallsvariablen mit (unbekanntem) Erwartungswert μ sind. Sie wollen die Hypothesen

$$H_0 : \mu = 480 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq 480$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$ testen.

(a) Begründen Sie, warum dieser Test als t-Test und nicht als Gauß-Test durchgeführt wird.

(b) Erlauben oben angegebene Daten ein Verwerfen von H_0 zum Niveau α? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweise:

- Für unabhängig identisch $N(\mu_0, \sigma^2)$ Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt, dass

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n^2}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu_0 \right)$$

  t_{n-1}-verteilt. Hierbei ist S_n^2 die empirische Varianz von $X_1, \ldots, X_n$.
- Ist Z eine t_9-verteilte Zufallsvariable, so gilt

$$P(|Z| > 2.26) = 0.05.$$