Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/09
16. Februar 2009

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Lösung zur Aufgabe 37 (3 Punkte)

$X_1, \ldots, X_n$ sind jeweils binomialverteilt mit Parametern 1 und p. Außerdem sind sie wegen der gemachten Modellannahmen unabhängig. Für die Binomialverteilung mit Parametern 1 und p gilt

$$p = \mathbf{E}X.$$

Nach der Vorlesung ist

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

ein konsistenter und erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert, deshalb haben wir mit $T(X_1, \ldots, X_n)$ einen erwartungstreuen und konsistenten Schätzer für p.

Lösung zur Aufgabe 38 (3 Punkte)

(a) Aufgrund der Art des Urnenexperiments handelt es sich um eine Binomialverteilung mit $n = 1$. Es ist also lediglich p zu bestimmen. Sind in der Urne θ schwarze Kugel, so ist die Wahrscheinlichkeit zufällig eine schwarze Kugeln zu ziehen $\frac{\theta}{5}$. Somit folgt:

$$p = \mathbf{P}_\theta \{X_1 = 1\} = \frac{\theta}{5}.$$

(b) Aufgrund des Ergebnisses bei der Ziehung reicht es die Fälle $\theta \in \{1, 2, 3, 4\}$ zu betrachten (da für $\theta = 0$ bzw. $\theta = 5$ die Ziehungsergebnisse nicht auftreten können, schließlich ist die Wahrscheinlichkeit für ein solches Ziehungsergebnis gleich 0). Wegen der Unabhängigkeit gilt

$$f(\theta) = \mathbf{P}_\theta[X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1] = \mathbf{P}_\theta[X_1 = 0] \cdot \mathbf{P}_\theta[X_2 = 1] \cdot \mathbf{P}_\theta[X_3 = 1] = (1 - p) \cdot p \cdot p$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{125} \\ f(2) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{125} \\ f(3) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{125} \\ f(4) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{125} \end{aligned}$$

Da $f(3)$ maximal ist, entscheiden wir uns für $\theta = 3$.

Lösung zur Aufgabe 39 (3 Punkte)

(a)

$$\mathbf{E}\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{E}\left\{X-\mu\right\} = \frac{1}{\sigma}\left(\mathbf{E}X-\mu\right) = 0$$

$$\mathbf{V}\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\right\} = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \mathbf{V}\left\{X-\mu\right\} = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \mathbf{V}\left\{X\right\} = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \cdot \sigma^2 = 1$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mathbf{E}X_i)\right\} &= \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\mathbf{E}\left\{\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mathbf{E}X_i)\right\} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{E}\left\{(X_i-\mathbf{E}X_i)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{E}X_i-\mathbf{E}X_i) = 0 \\
\mathbf{V}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mathbf{E}X_i)\right\} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\right)^2 \mathbf{V}\left\{\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mathbf{E}X_i)\right\} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\right)^2 \mathbf{V}\left\{\sum_{i=1}^{3}X_i-\sum_{i=1}^{3}\mathbf{E}X_i\right\} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\right)^2 \mathbf{V}\left\{\sum_{i=1}^{3}X_i\right\}
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit gilt dann

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\right)^2 \mathbf{V}\left\{\sum_{i=1}^{3}X_i\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\right)^2 \sum_{i=1}^{3}\mathbf{V}\left\{X_i\right\}.$$

Da X_1, X_2, X_3 identisch verteilt sind folgt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\right)^2 \sum_{i=1}^{3}\mathbf{V}\left\{X_i\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\right)^2 \cdot 3\cdot\mathbf{V}\left\{X_1\right\} = 1$$

Lösung zur Aufgabe 40 (3 Punkte)

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ \text{wobei } X_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls Ente } i \text{ überlebt} \\ 0 & \text{, falls Ente } i \text{ nicht überlebt} \end{cases}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\{X_i = 1\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \\
\Rightarrow\ & \mathbf{E}(X_i) = 1\cdot\mathbf{P}\{X_i=1\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 0,349 \\
\Rightarrow\ & \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right) \approx 10\cdot 0,349 = 3,49
\end{aligned}$$