Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09
23. Januar 2009

11. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 30 (3 Punkte)

Im Rahmen einer Untersuchung zum Thema Studienabbruch, muss Pädagoge P. schätzen, wieviele Studenten schon im Verlauf des ersten Semesters ihr Studium abbrechen. Nehmen wir einmal an, dass P. eine Liste mit den Adressen aller Studienanfänger eines Jahrgangs zur Verfügung hat. P. wählt zufällig von dieser Liste Personen aus, die er befragt. Er überlegt sich folgende Modellannahmen: Jeder Studienanfänger entscheidet sich unabhängig von allen anderen Studenten mit der selben Wahrscheinlichkeit p für einen Abbruch des Studiums im ersten Semester. Die Zufallsvariable X_i verwendet er zur mathematischen Modellierung der Antwort des i-ten Befragten. X_i erhält den Wert 1, falls der i-te Befragte sein Studium abgebrochen hat und 0 sonst. Die Gesamtanzahl aller Befragten sei n. Geben Sie einen erwartungstreuen und konsistenten Schätzer für den Parameter p an und begründen Sie, dass der von ihnen angegebene Schätzer diese Eigenschaften hat.

Aufgabe 31 (3 Punkte)

In einer Urne befinden sich 5 Kugeln. Jede der Kugeln ist entweder weiß oder schwarz. Wir ziehen jetzt dreimal jeweils eine Kugel mit Zurücklegen und erhalten folgendes Ergebnis: weiß, schwarz, schwarz. Gesucht ist die Anzahl $\theta \in \{0, \ldots, 5\}$ der schwarzen Kugeln. Die Zufallsvariable X_i habe den Wert 1, falls bei der i-ten Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wurde und Null sonst (für $i = 1, 2, 3$). Die Idee beim Maximum-Likelihood-Prinzip ist es, den Parameter θ so zu wählen, dass die Wahrscheinlichkeit für das oben angegebene Ziehungsergebnis maximal ist. Dabei kann man davon ausgehen, dass die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 unabhängig und identisch verteilt sind. Bei obiger Ziehung wurde für X_1 der Wert 0, für X_2 der Wert 1 und für X_3 der Wert 1 beobachtet.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_1 in Abhängigkeit von θ.

(b) Bestimmen Sie dasjenige θ für $\theta \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, dass die Funktion

$$f(\theta) = \mathbf{P}_\theta[X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1]$$

maximal wird.

Aufgabe 32 (3 Punkte)

Sei $\sigma > 0$.

(a) Sei X eine Zufallsvariable mit Varianz σ^2 und Erwartungswert μ. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von

$$\frac{X - \mu}{\sigma}.$$

(b) Die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 seien unabhängig und identisch verteilt mit Varianz σ^2 und Erwartungswert μ. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von

$$\frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sigma} \sum_{i=1}^{3} \left(X_i - E(X_i) \right).$$

Aufgabe 33 (3 Punkte)

Zehn perfekten Schützen stehen zehn unschuldige Enten gegenüber. Jeder Schütze wählt zufällig und unbeeinflusst von den anderen Schützen eine Ente aus, auf die er schießt. Sei X die zufällige Zahl überlebender Enten. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X unter Verwendung der Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i, \text{ wobei } X_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls Ente } i \text{ überlebt} \\ 0 & \text{, falls Ente } i \text{ nicht überlebt} \end{cases}$$